DÉFINITION (factoriser)

a, b, et c désignent des nombres.

On a p. ex.:

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\text{somme} \xrightarrow{\text{factoriser}} \text{produit}$$

Transformer une somme (des termes) en un produit (des facteurs) s'appelle **factoriser**.

MÉTHODES (méthodes de factorisation)

a) par mise en évidence
Si tous les termes ont un facteur commun, alors on peut **mettre** ce facteur **en évidence**.

b) en utilisant les identités remarquables
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 – 2ab + b^2 = (a – b)^2$
$a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$

Exemples:
- $\mathbf{3}x + \mathbf{3}y = \mathbf{3}(x + y)$
- $2x – 4 = \mathbf{2}x – \mathbf{2}\cdot 2 = \mathbf{2}(x – 2)$
- $15x^2 – 5x = 3 \cdot \mathbf{5x} \cdot x – \mathbf{5x} = \mathbf{5x}(3x – 1)$
- $4\mathbf{(x + 3)} – (2x + 1)\mathbf{(x + 3)} = \mathbf{(x + 3)[}4 – (2x + 1)] = (x + 3)(4 – 2x – 1) = (x + 3)(3 – 2x)$
- $(3x – 2)\mathbf{(2x – 5)} + \mathbf{(2x – 5)}^2 = \mathbf{(2x – 5)}[(3x – 2) + (2x – 5)] = (2x – 5)(3x – 2 + 2x – 5) = (2x – 5)(5x – 7)$

- $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$
- $4x^2 – 9 = (2x)^2 – 3^2 = (2x + 3)(2x – 3)$
- $81a^2 – 90ab + 25b^2 = (9a)^2 – 2\cdot 9a\cdot 5b + (5b)^2 = (9a – 5b)^2$

EXERCICE 01

Factoriser les expressions suivantes le plus possible.

1°

a) $3a + 3b – 3c$
b) $3x^2y + 5xy$
c) $3(x + 1) + 5(x + 1)$
d) $x(x – 2) + 3(x – 2)$
e) $(2x – 1)(x + 2) + (3x – 4)(2x – 1)$
f) $(x + 3)^2 + (x + 2)(x + 3)$
g) $(2x + 5)(x – 4) – (3x + 1)(x – 4)$
h) $4(3x - 4) + x(4 – 3x)$
i) $x^2 - 9$
j) $a^2 + 2ab + b^2$
k) $x^2 + 4x + 4$
l) $4x^2 - 12x + 9$

2°

a) $4a – 8b + 16c$
b) $12x^3 + 48x^2 + 36x$
c) $4x^3y^2 + 8x^2y^2 – 2xy$
d) $x^{30} + x^{20} + x^{10}$
e) $5(2x + 3) + 8(2x + 3)$
f) $x^2(3x – 1) – 2(3x – 1)$
g) $(2x - 7)^2 + 2(2x - 7)$
h) $(-x – 1)(2x + 2) + (3x – 5)(-x -1)$
i) $(3x + 2)(5x + 3) – (5x + 3)(6x - 3)$
j) $(1 - 4x)(2x – 9) + (4x – 1)(3x + 7)$
k) $(3x + 1)(2x – 5) – (5 – 2x)(7x – 2)$
l) $4x^2 - 25$
m) $49 – 36x^2$
n) $9x^2 + 6x + 1$
o) $x^2 + 12x + 36$

3°

a) $x^2 + 10x + 25$
b) $5x^2 + 10x + 25$
c) $x^3 + 15x^2 + 25x$
d) $4(x + 5) + 6(x + 5) – 15(x + 5)$
e) $(2x + 3)^2 – (5x – 7)(2x + 3)$
f) $49x^4 – 1$
g) $(5x + 1)(2x – 3) + (2x – 3)$
h) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2$
i) $x^2 – 14x + 49$
j) $2(2x + 1)(x – 7) + (x – 7)(3x + 1)$
k) $(3x + 4)^2 - (2x + 5)(3x + 4)$
l) $39x + 52y – 13xy$
m) $(3x – 1)(2x + 2) – (1 – 3x)(5x + 7)$
n) $(1 – 7x)(1 – 6x) + (6x + 1)(7x – 1)$
o) $x^4 - 16$
p) $7(x + 1)(x + 3) – (7x + 7)(2x + 5)$
q) $10x^{10} + 20x^{20}$
r) $(3x + 7)(-x – 4) + (x + 4)(3x – 7)$
s) $(5x + 1)^2 + (6x – 1)(5x + 1)$
t) $(4x – 3)(2x + 4) + (3 – 4x)^2$
u) $(8x + 8)(4x + 1) + (4x – 1)(7x + 7)$

1.1. Définition

DÉFINITION (polynômes du second degré)

On appelle polynôme du second degré un polynôme de la forme $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ avec a, b et c des nombres réels et a ≠ 0.

1.2. Factorisation d'un polynôme du second degré

Voici d'abord trois exemples :

$$\begin{aligned} & x^2+4x+3 \\ &= \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2}\underbrace{-2^2+3} \\ &= (x+2)^2-4+3 \\ &= (x+2)^2-1 \\ &= (x+2)^2-1^2 \\ &= (x+2+1)(x+2-1) \\ &= (x+3)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2-7x-8 \\ &= \underbrace{x^2-2\cdot x\cdot \tfrac{7}{2}+(\tfrac{7}{2})^2}\underbrace{-(\tfrac{7}{2})^2-8} \\ &= (x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{49}{4}-\tfrac{32}{4} \\ &= (x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{81}{4} \\ &= (x-\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{9}{2})^2 \\ &= (x-\tfrac{7}{2}+\tfrac{9}{2})(x-\tfrac{7}{2}-\tfrac{9}{2}) \\ &= (x+\tfrac{2}{2})(x-\tfrac{16}{2}) \\ &= (x+1)(x-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x^2+9x-5 \\ &= 2(x^2+\tfrac{9}{2}x-\tfrac{5}{2}) \\ &= 2(\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot \tfrac{9}{4}+(\tfrac{9}{4})^2}\underbrace{-(\tfrac{9}{4})^2-\tfrac{5}{2}}) \\ &= 2\left[(x+\tfrac{9}{4})^2-\tfrac{81}{16}-\tfrac{40}{16}\right] \\ &= 2\left[(x+\tfrac{9}{4})^2-\tfrac{121}{16}\right] \\ &= 2\left[(x+\tfrac{9}{4})^2-(\tfrac{11}{4})^2\right] \\ &= 2(x+\tfrac{9}{4}+\tfrac{11}{4})(x+\tfrac{9}{4}-\tfrac{11}{4}) \\ &= 2(x+\tfrac{20}{4})(x-\tfrac{2}{4}) \\ &= 2(x+5)(x-\tfrac{1}{2}) \\ &= (x+5)(2x-1) \end{aligned}$$

MÉTHODE (factorisation d'un polynôme du second degré)

Soit le polynôme ax^2+ bx +c, avec a ≠ 0. Pour factoriser ce polynôme :

a) si a ≠ 1, on met a en évidence

b) on fait apparaître un trinôme carré parfait en ajoutant et en retranchant le même nombre

c) on factorise le trinôme carré parfait en utilisant $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

d) si on obtient alors une différence de deux carrés, on factorise on utilisant $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Remarque : on ne peut pas factoriser tous les polynômes du second degré.

Exemple :

$$\begin{aligned} & x^2+4x+8 \\ &= \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2}\underbrace{-2^2+8} \\ &= (x+2)^2-4+8 \\ &= (x+2)^2+4 \\ &= (x+2)^2+2^2 \end{aligned}$$

On a maintenant une somme de deux carrés, qu'on ne peut pas factoriser.

EXERCICE 02

Factoriser les expressions suivantes le plus possible.

a) $x^2 - 2x - 8$	e) $x^2 - 12x + 27$	i) $5x^2 + 4x - 1$
b) $x^2 - x - 6$	f) $x^2 + 12x + 11$	j) $3x^2 - 20x + 25$
c) $x^2 + x - 30$	g) $2x^2 - 5x - 3$	k) $4x^2 + 8x + 3$
d) $x^2 - 2x - 80$	h) $4x^2 + 11x + 6$	l) $6x^2 - 25x + 14$

2.1. Définitions et propriétés (Rappel)

RAPPELS (racine carrée d'un nombre)

→ La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, dont le carré est a.
Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Exemples : • $\sqrt{36} = 6$ car $6^2 = 36$ • $\sqrt{100} = 10$ car $10^2 = 100$

→ Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{a}^2 = a$

Exemples : • $\sqrt{7^2} = 7$ • $\sqrt{13}^2 = 13$ • $\sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{14}^2$

→ Si a et b sont des nombres positifs, alors on a : $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$. Si de plus, b est non nul, alors : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exemples : • $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ • $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

Remarques

1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Exemples :
• $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
• $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$
$\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$

2) Dans les exercices, on ne remplace une racine carrée par sa valeur que si celle-ci est un nombre entier ou décimal.
Il ne faut JAMAIS remplacer une racine carrée par sa valeur approximative !

Exemples :
• $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$ • $\sqrt{2,25} = 1,5$ car $1,5^2 = 2,25$
• $\sqrt{2} \neq 1,41$ car $1,41^2 = 1,9881 \neq 2$
• $\sqrt{2} \neq 1,4142$ car $1,4142^2 = 1,99996164 \neq 2$
• $\sqrt{2} \neq 1,414213$ car $1,414213^2 = 1,999998409369 \neq 2$

EXERCICE 03

Calculer. (Le résultat doit être un nombre entier.)

a) $\sqrt{36} - \sqrt{49}$
b) $4\sqrt{25}$
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{3}^2$
d) $3\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
e) $6\sqrt{2} - 3\left(2\sqrt{2} - 3\right)$
f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{8}^2 - 2\sqrt{49}$
g) $6\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} - 7\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}$
h) $\sqrt{100} - \sqrt{64} - \sqrt{36}$
i) $\left(\sqrt{6} - \sqrt{14}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{14}\right)$

EXERCICE 04

Calculer et réduire le plus possible.
Exemples :
• $2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = -7\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$ (on ne peut plus continuer !)
• $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{3}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$ ( )

a) $2\sqrt{2} - 9 - 3\sqrt{2} + 5$
b) $3\left(\sqrt{2} - 4\right) - 2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$
c) $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\left(-4 + \sqrt{3}\right)$
d) $\left(\sqrt{7} - 4\right)^2$
e) $3\sqrt{5} - \sqrt{5}\left(2 + \sqrt{5}\right) - 1$
f) $4\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - 7\left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)$
g) $2 + \sqrt{3}\left(2\sqrt{2} + 5\right) - \left(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\right)$
h) $2\left(\sqrt{2} + \sqrt{9}\right) - 4\left(5 - 2\sqrt{2}\right)$
i) $\left(2\sqrt{3} - 7\right)\left(6 - 3\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 05

Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers. b doit être le plus petit possible.

Exemples :

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $4\sqrt{12} = 4\sqrt{4 \cdot 3} = 4\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
- $\sqrt{48} - \sqrt{12} = \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

a) $\sqrt{20}$ d) $2\sqrt{72}$ g) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$ j) $\sqrt{300} + 2\sqrt{48} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{27}$ e) $4\sqrt{18}$ h) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ k) $5\sqrt{5} - \sqrt{80} + \sqrt{45}$

c) $\sqrt{98}$ f) $5\sqrt{108}$ i) $\sqrt{242} - \sqrt{72}$ l) $\sqrt{36} + \sqrt{56} - 2\sqrt{9}$

2.2. Rendre rationnel un dénominateur

Explication

Les racines carrées, dont la valeur exacte n'est pas un nombre décimal, sont des nombres irrationnels (car on ne peut pas les exprimer sous forme d'une fraction). Rendre un dénominateur rationnel veut donc dire 'faire disparaître toutes les racines d'un dénominateur'. Cela est parfois très utile, car des fractions avec des dénominateurs rationnels sont plus simples à manipuler.

MÉTHODE (rendre rationnel un dénominateur)

→ Si on n'a qu'un seul nombre irrationnel au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par ce nombre. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Exemples :

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $-\frac{5}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

→ Si on a deux termes au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

L'expression conjuguée de a + b est a – b et celle de a – b est a + b. On obtient alors une différence de deux carrées et les racines carrées 'disparaîssent'.

Exemples :

- $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$
- $\frac{-3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{-3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{-3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \frac{-3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} = \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$
- $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2} = \frac{5+2\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{7+\sqrt{10}}{3}$

EXERCICE 06

Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ g) $\frac{-4}{\sqrt{7}-3}$ j) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

b) $-\frac{3}{\sqrt{6}}$ e) $\frac{3}{\sqrt{16}}$ h) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ k) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{2}{\sqrt{5}+2}$ i) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ l) $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

EXERCICE 07

Un industriel fabrique des parapluies qu'il vend à 4 € par pièce aux commerçants. Pour produire q parapluies par jour, les coûts en € s'élèvent à $C(q) = 0{,}005q^2 + 0{,}44q + 512$.

a) Exprimer le bénéfice B(q) réalisé par le commerçant en fonction de q.

b) Combien de parapluies doit-il fabriquer par jour pour que ce bénéfice soit maximal ?

EXERCICE 08

Si un fermier de riz effectue sa récolte de riz aujourd'hui, il obtiendra 1200 kg valant 0,40 € le kg. Pour chaque semaine d'attente, la récolte augmente de 100 kg mais le prix baisse de 0,02 € par kg.

Quand devrait-il effectuer sa récolte pour maximiser ses bénéfices ?

EXERCICE 09

Une compagnie aérienne veut faire une promotion sur le vol Paris-Londres. Il y en tout 10200 places disponibles.

La demande D(p) si le prix d'un billet est de p € est exprimée par : $D(p) = 10200 – 120p$.

1° a) Combien de passagers y a-t-il si le billet coûte 65 € ?

b) Quel est le prix du ticket s'il y a 7200 passagers ?

2° a) Exprimer la recette R(p) en fonction de p.

b) Pour quelle valeur de p la recette est-elle maximale ?

EXERCICE 10

Une entreprise fabrique et vend des sacs de sport. Le coût de fabrication de chaque article est de 2 € et les frais fixes s'élèvent à 864 € pour l'ensemble de la production.

1° a) Combien coûte la production de 100 sacs ?

b) Déterminer la fonction coût C, où C(q) indique le prix de la production de q sacs.

2° Une étude de marché a montré que pour un prix de vente de p € par sac, le nombre de sacs demandés et vendus est de $D(p) = 288 – 12 p$ (avec appartenant à [5 ; 24]).

a) Exprimer la recette R(p) en fonction de p si tous les sacs sont vendus.

b) Exprimer le bénéfice B(p) en fonction de p si tous les cas sont vendus.

c) Pour quel prix ce bénéfice est-il maximal ? Combien de sacs a-t-on alors vendus ?

EXERCICE 11

Un commerçant sur internet propose un produit à 50 € la pièce. Il en vend 600 par mois. Une entreprise de marketing a trouvé que chaque fois si le commerçant baisse le prix de 1 €, alors il vendrait 20 pièces de plus.

Avec quel prix, la recette du commerçant est-elle maximale ?

EXERCICE 12

Un éditeur offre un magazine d'information au prix d'abonnement annuel de 60 €. 5000 personnes ont un tel abonnement. Chaque année, l'éditeur a 20000 € de coûts et aussi 10 € de coûts par abonnement.

1° Quel est le bénéfice réalisé en un an ?

Une étude de marché a montré que si l'on baisse le prix de l'abonnement de 1 €, alors 200 personnes de plus s'abonneraient au magazine.

2° a) Déterminer la fonction affine D qui exprime le nombre d'abonnements vendus D(p) en fonction du prix p.

b) Exprimer le bénéfice réalisé B(p) en fonction du prix p.

c) Pour quelle valeur de p, le bénéfice est-il maximal ?