

Exercice 6

	condition	dom f	ensemble des racines
1)	$4x^2 - 9x \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0; \frac{9}{4}\}$	\emptyset
2)	$7 - 3x \geq 0$	$] -\infty; \frac{7}{3}]$	$\{\frac{7}{3}\}$
3)	$(x+2)(3-x) \geq 0$	$[-2; 3]$	$\{-2; 3\}$
4)	$x^2 - 4 > 0$	$] -\infty; -2[\cup]2; +\infty[$	\emptyset
5)	$x^2 - 4x + 4 > 0$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	\emptyset
6)	aucune	\mathbb{R}	$\{1\}$
7)	$-9x^2 + 30x - 25 \geq 0$	$\{\frac{5}{3}\}$	$\{\frac{5}{3}\}$
8)	$x^2 \neq 0$ et $ x-6 \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$	\emptyset
9)	$\frac{x^2 - 5x - 6}{15x - 3x^3} \geq 0$	$] -\infty; -\sqrt{5}[\cup]-1; 0[\cup]\sqrt{5}; 6]$	$\{-1; 6\}$
10)	$5 - 3 x \geq 0$	$[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$	$\{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\}$

Exercice 8

dom f = B, dom g = C, dom h = D, dom i = A

Exercice 12

a) 1) $S = \{-5, 7; 7\}$ 2) $S = \{6, 2; -5\}$ 3) $S = \{-7; -2; 3; 8\}$ 4) $S = \{-4; 7, 3\}$ 5) $S = \{-6, 4; 0; 7, 6\}$

b) 1) $S = [-8; -5, 7[\cup]7; 8]$ 2) $S = [-8; -7, 5[\cup]-2, 7; 2]$ 3) $S =]-8; -6, 4[\cup]7, 6; 8[$ 4) $S = [-6, 4; 7, 6]$

c) $f(x) < 1$ si $x \in]-6, 3; 7, 5[$

$g(x) \geq 1$ si $x \in [-6, 5; -2, 6] \cup [3, 8; 7, 7]$

donc $S =]-6, 3; -2, 6] \cup [3, 8; 7, 5[$

Exercice 26

1) $f \neq g$, car $f(x) = |x| \neq g(x)$

2) $f \neq g$, car dom f = \mathbb{R} et dom g = $[0; +\infty[$

3) $f = g$, car dom f = dom g = \mathbb{R} et $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = f(x)$

4) $f \neq g$, car dom f = $[\frac{3}{2}; +\infty[$ et dom g = \mathbb{R}

5) $f \neq g$, car dom f = $] -\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$ et dom g = $[1; +\infty[$

6) $f \neq g$, car dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dom g = \mathbb{R}

remarque : sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x-1} = \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = x-4 = g(x)$

7) $f \neq g$, car dom f = $] -\infty; -3[\cup [2; +\infty[$ et dom g = $[2; +\infty[$

8) $f = g$, car dom f = dom g = $]0; +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x-\sqrt{x}}{x} = g(x)$

9) $f \neq g$, car dom f = $[2; 3[\cup]3; +\infty[$ et dom g = $[2; +\infty[$

remarque : sur $[2; 3[\cup]3; +\infty[$:

$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)} = \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{\sqrt{x-2}^2 - 1^2} = \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3} = \sqrt{x-2}+1 = g(x)$

10) $f \neq g$, car $f(x) \neq g(x)$

Exercice 29

a) $\text{dom } f = [-4 ; 4]$

b) 1) f est positive sur $[4 ; -1] \cup [2 ; 3]$

2) $f(x) < 0$ sur $]-1 ; 2[\cup]3 ; 4]$

3) $f(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2$ sur $[-4 ; 4]$

Exercice 31

a) $f < g$ sur $]-3 ; 1,5[$

b) $f(x) \geq g(x)$ sur $[-4 ; -3] \cup]1,5 ; 4]$

Exercice 33

1) f est minorée, majorée et donc aussi bornée (plus petit majorant : 3 ; plus grand minorant : -1)

2) f est majorée (plus petit majorant : 2)

3) f est minorée (plus grand minorant : -2)

4) f est minorée, majorée et donc aussi bornée (plus petit majorant : 1 ; plus grand minorant : -1)

5) f est minorée (plus grand minorant : -4)

6) f est majorée (plus petit majorant : 0)

Exercice 44

	dom f	dom g	dom $(f \circ g)$	dom $(g \circ f)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
1)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$4x^2 + 5$	$16x^2 + 40x + 25$
2)	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2} \}$	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{1-2x}$	$\frac{x-2}{x}$
3)	$[-1 ; +\infty[$	\mathbb{R}	$[-2 ; +\infty[$	$[-1 ; +\infty[$	$\sqrt{2x+4}$	$3+2\sqrt{x+1}$
4)	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2} \}$	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2} \}$	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{5}{2}; \frac{7}{2} \}$	$\frac{ -6x+4 }{ 2x-1 }$	$\frac{1}{2 x-3 -1}$
5)	$]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$	\mathbb{R}	$]-\infty ; -\frac{5}{2}[\cup [-\frac{1}{2} ; +\infty[$	$]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$	$\sqrt{4x^2+12x+5}$	$3+2\sqrt{x^2-4}$

Exercice 45

e) 1) $\text{dom } (f \circ h \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $(f \circ h \circ g)(x) = \left(\frac{-2}{x-1} \right)^2 = \frac{4}{x^2-2x+1}$

2) $\text{dom } (g \circ f \circ h) = \mathbb{R}^*$; $(g \circ f \circ h)(x) = \left(\frac{-2}{x} \right)^2 - 1 = \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}$

3) $\text{dom } (g \circ h \circ f) = \mathbb{R}^*$; $(g \circ h \circ f)(x) = \frac{-2}{x^2} - 1 = \frac{-2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = \frac{-2-x^2}{x^2}$

4) $\text{dom } (h \circ f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $(h \circ f \circ g)(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-2x+1}$

Exercice 48

1) $f(x) = (h \circ g)(x)$ avec $g(x) = x^2$ et $h(x) = 1-x$

2) $f(x) = (h \circ g)(x)$ avec $g(x) = 1-x$ et $h(x) = x^2$

3) $f(x) = (h \circ g)(x)$ avec $g(x) = 2-x$ et $h(x) = \sqrt{x}$

4) $f(x) = (i \circ h \circ g)(x)$ avec $g(x) = x^2$ et $h(x) = 4-x$ et $i(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = (k \circ j \circ i \circ h \circ g)(x)$ avec $g(x) = x-1$ et $h(x) = x^2$ et $i(x) = \sqrt{x}$ et $j(x) = \frac{1}{x}$ et $k(x) = -x$

6) $f(x) = (i \circ h \circ g)(x)$ avec $g(x) = 2x - \frac{\pi}{3}$ et $h(x) = \cos x$ et $i(x) = x^2$

Exercice 51

$f_1^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$	$f_2^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$	$f_3^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty[$ $x \mapsto x^2 + 1$
f_4 n'est pas injective, car p.ex. 0 est l'image de 2 et de -2. la réciproque n'est pas une fonction	$f_5^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$	f_6 n'est pas injective, car p. ex. 2 est l'image de 2 et de -2. la réciproque n'est pas une fonction

Exercice 9

a) ① g ② i ③ f ④ h

b) $\text{dom } f = \mathbb{R}$, $\text{im } f = [-1; +\infty[$; $\text{dom } g = \mathbb{R}$, $\text{im } g = [-2; 1]$; $\text{dom } h = \mathbb{R}$, $\text{im } h = [-1; 1]$; $\text{dom } i = \mathbb{R}$, $\text{im } i = \mathbb{R}_+$

c) h est impaire et i est paire

d) $i(x) = |x| = |-x|$

Exercice 13

	a) domaine	b) parité	c) racines	d) périodicité
1)	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi k \in \mathbb{Z}\}$	impaire	/	$T = 2\pi$
2)	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbb{Z}\}$	paire	/	$T = 2\pi$
3)	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z}\}$	/	$x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$T = \frac{\pi}{2}$
4)	$\mathbb{R} \setminus \{2k\pi k \in \mathbb{Z}\}$	impaire	$x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$T = 2\pi$
5)	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$	paire	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$T = 2\pi$
6)	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$	/	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$T = \pi$

Quelques exercices supplémentaires

Exercice A1

a) Montrer que le graphe de la fonction $f: x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$ admet la droite d'équation $x = \frac{5}{6}$ comme axe de symétrie.b) Montrer que le graphe de la fonction $g: x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$ admet un centre de symétrie.c) Montrer que le graphe de la fonction $h: x \mapsto x^3 - 2x + x - 2$ admet un centre de symétrie d'abscisse $\frac{2}{3}$.d) Montrer que le graphe de la fonction $i: x \mapsto \cos(3x) - 1$ admet un centre de symétrie d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

Exercice A2

Dans les cas suivants, déterminer dom f, ainsi que la parité et la périodicité de f.

a) $f: x \mapsto \frac{|x|}{x^2 + 1}$

b) $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

c) $f: x \mapsto |x| + x$

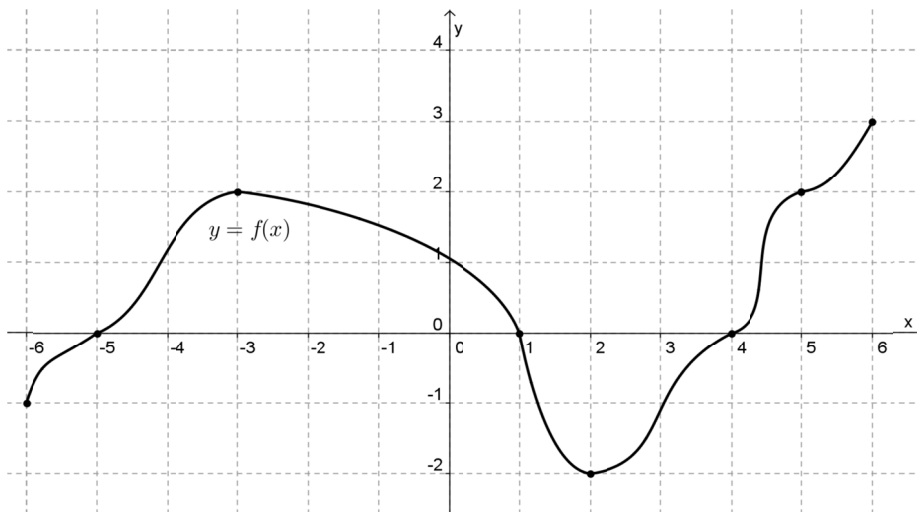
d) $f: x \mapsto \frac{x}{x^3 - 7x}$

e) $f: x \mapsto x^2 - 1 + 2\cos x$

f) $f: x \mapsto \cos x + \tan x$

g) $f: x \mapsto \frac{\sin 2x}{2 - \cos^2 x}$

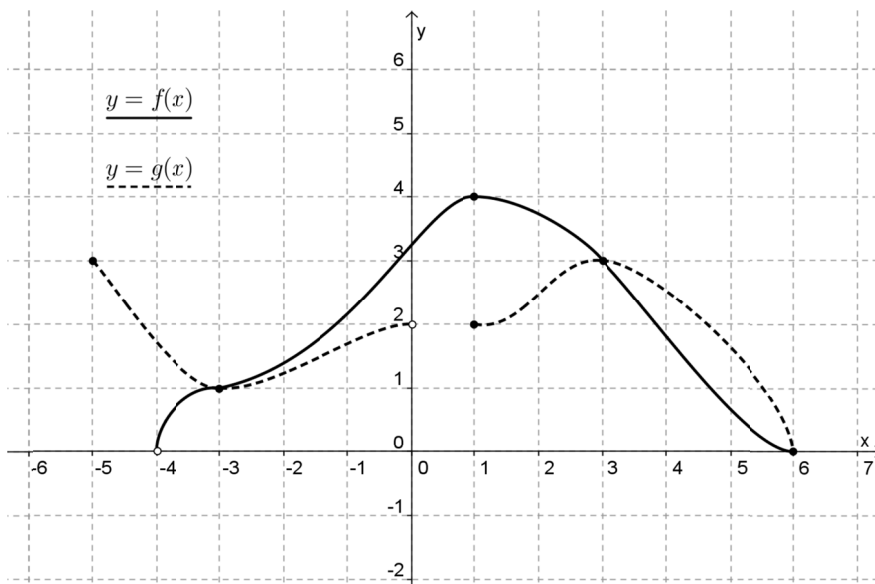
h) $f: x \mapsto \frac{\tan x - \sin x - x}{\cos x}$

En cas de besoin... (remise facultative)**Exercice A3**

- Déterminer dom f et im f .
- Quelle est la valeur de $f(5)$?
- Que vaut l'image de -3 ?
- Quelles sont les racines de f ?
- Résoudre l'équation $f(x) = -2$.
- Résoudre l'inéquation $f(x) < 2$.
- Résoudre l'équation $f(x) - 3 = 0$.
- Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle croissante?
- Sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est-elle positive?
- La fonction f est-elle minorée? majorée? bornée?

Exercice A4

Voici les graphes cartésiens de deux fonctions f et g :



- Déterminer dom f , im f , dom g et im g .
- Quelles sont les racines de f ?
- Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
- Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

Exercice A5

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 4x + 3} - \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$d) f(x) = \sqrt{\frac{5x+4}{2x+8}}$$

$$b) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} + \frac{x-1}{x+3}$$

$$e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-2x+7}}$$

$$c) f(x) = \frac{\sqrt{5x+4}}{\sqrt{2x+8}}$$

$$f) f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x-4} - \sqrt{5-2x}$$

Exercice A6

Est-ce que dans les cas suivants, $f = g$?

a) $f(x) = x + 3$ et $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{x + 3\sqrt{x}}{x}$

c) $f(x) = |x + 5|$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$

Exercice A7

Soit les fonctions suivantes : $f(x) = x^2 + 2x$ $g(x) = \frac{2x}{x+3}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer $\text{dom } f$, $\text{dom } g$ et $\text{dom } h$.

2) Déterminer le domaine de définition et l'expression analytique des fonctions suivantes :

a) $f \circ g$ b) $h \circ f$ c) $h \circ g$ d) $h \circ g \circ f$ e) $\frac{f}{g}$

Exercice A8

Décomposer les fonctions suivantes en composée de fonctions usuelles :

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 8}$ b) $f(x) = (3\sqrt{x} + 8)^2$ c) $f(x) = \frac{4}{x+2} + 5$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3|x| - 1}}$

Pour s'autocontrôler... (corrigé dans le livre)

exercices 52, 53, 59, 64, 65, 66, 67

Pour aller plus loin... (remise facultative)**Exercice A9**

a) Déterminer le domaine de la fonction $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, c \in \mathbb{R}^*$ et $b, d \in \mathbb{R}$

b) Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie dont on déterminera les coordonnées.

Exercice A10

Soit $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = -2x + m$

Déterminer m pour que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice A11

Soit f une fonction paire définie sur \mathbb{R} et g une fonction impaire définie sur \mathbb{R} .

Étudier la parité de $f \circ g$, de $f \circ f$ et de $g \circ g$.

Exercice A12

Soit f une fonction strictement croissante définie sur \mathbb{R} et g une fonction strictement décroissante définie sur \mathbb{R} .

Étudier les variations de $f \circ g$, de $f \circ f$ et de $g \circ g$.

Exercice A13

Soit $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ avec $a, c \in \mathbb{R}^*$ et $b, d \in \mathbb{R}$

a) Trouver une relation entre a, b, c et d pour que $f \circ g = g \circ f$.

b) Si $a = 2$ et $b = 5$, trouver trois couples $(c ; d)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.