A. Généralités sur les fonctions numériques

1 Vocabulaire et notations. Domaine de définition.

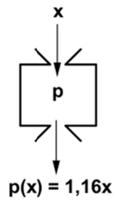
(🕮 p. 5)

1.0 Exemple introductif (Rappel)

A une station-service, le prix à payer dépend du nombre de litres d'essence achetés.

On dit qu'on exprime le prix **en fonction** du nombre de litres.
Si p.ex. 1 litre coûte 1,16 €, alors x litres coûtent 1,16·x €.

Appelons p(x) (lire "p de x"), le prix en fonction des litres achetés.
On a : $\boxed{p(x) = 1,16x}$



L'"objet" p est appelé **une fonction** en mathématiques. Une fonction "transforme" en fait un nombre en un autre nombre.

Combien coûtent 10 litres ?
→ p(10) = 1,16·10 = 11,6 → 10 litres coûtent 11,6 €.
*(On dit que 11,6 est **l'image** de 10 par la fonction p.)*

Combien coûtent 43,5 litres ?
→ p(43,5) = 1,16·43,5 = 50,46 → 43,5 litres coûtent 50,46 €.
*(On dit que 50,46 est **l'image** de 43,5 par la fonction p.)*

1.1 Fonction numérique. Image. Graphe.

Une **fonction numérique** d'une variable réelle est une relation qui à chaque réel fait correspondre au plus un réel.

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou simplement $f : x \mapsto f(x)$

$x \mapsto y = f(x)$

x est la **variable** réelle et f(x) est l'**image** de x par f.

• En pratique on écrit p.ex. « la fonction $f : x \mapsto x^2$ » ou bien « la fonction f définie par $f(x) = x^2$ »

• **L'ensemble-image** de f contient les images de tous les réels de dom f. Il est noté im f.
(ainsi p. ex. pour $f : x \mapsto x^2$: dom f = $\mathbb{R}$ et im f = $\mathbb{R}_+$)

• L'ensemble de tous les points (x ; f(x)), x étant un nombre de dom f est noté $\mathbf{G_f}$ ou $\mathbf{C_f}$ et appelé **représentation graphique**, **courbe représentative** ou **graphe** de f. L'**équation** de la courbe représentative est **y = f(x).**

1.2 Domaine de définition

On appelle **domaine de définition** de la fonction f (noté dom f ou D_f) l'ensemble de tous les réels x qui ont une image par f.

Pour déterminer un domaine, il faut tenir compte de plusieurs types de conditions : Une expression…

a) …au *dénominateur* ne doit pas s'annuler. $\frac{N}{D}$ → condition : $D \neq 0$

b) …dont on calcule la *racine carrée* doit être positive $\sqrt{A}$ → condition : $A \geq 0$

c) …dont on calcule un *logarithme* doit être strictement positive log(A) → condition : $A > 0$

d) …dont on calcule la *tangente* ne doit pas pouvoir s'écrire sous la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ tan(A) → $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) … dont on calcule la *cotangente* ne doit pas pouvoir s'écrire sous la forme $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ cot(A) → $A \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.3 Antécédent. Racine.

On appelle **antécédent** d'un nombre k par la fonction f, tout nombre x tel que f(x) = k.
On appelle **racine** d'une fonction, tout nombre x tel que f(x) = 0 (donc les antécédents de 0).

Remarque :
• Un nombre peut avoir plusieurs antécédents, mais au plus une image.

1.4 Exemples

a) Déterminer le domaine de la fonction $f : x \mapsto \frac{-1-3x}{4x-1}$ et les antécédents de 1 et de 2 par f.

condition : $4x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{4}$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{4} \}$

antécédents de 1 :

$f(x) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-3x}{4x-1} = 1$

$\Leftrightarrow -1 - 3x = 4x - 1$

$\Leftrightarrow -7x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

antécédents de 2 :

$f(x) = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-3x}{4x-1} = 2$

$\Leftrightarrow -1 - 3x = 8x - 2$

$\Leftrightarrow -11x = -1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{11}$

b) Déterminer le domaine et les racines de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{-1-3x}{4x-1}}$.

conditions :

(1) : $\dfrac{-1-3x}{4x-1} \geq 0$ et (2) : $4x - 1 \neq 0$

(1) : $-1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ $\quad$ $4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-1-3x$		+	0	−		−	
$4x-1$		−		−	0	+	
$\dfrac{-1-3x}{4x-1}$		−	0	+	$\|\|$	−	

(2) : $4x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{4}$

donc $D_f = [-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{4}[$

racines de f :

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{-1-3x}{4x-1}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-3x}{4x-1} = 0$

$\Leftrightarrow -1 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

c) Déterminer le domaine de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{-1-3x}}{\sqrt{4x-1}}$.

conditions :

(1) $-1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{3}$

(2) $4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{4}$

(3) $\sqrt{4x-1} \neq 0 \Leftrightarrow 4x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{4}$

donc $D_f = \{\ \}$

Remarque :
On peut regrouper les conditions (2) et (3) en écrivant $4x - 1 > 0$.

d) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \tan(2x + \pi)$.

condition : $2x + \pi \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\quad | -\pi$

$\Leftrightarrow 2x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\quad | : 2$

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2 Comparaison de deux fonctions

2.1 Égalité de deux fonctions
📖 p. 9

2.2 Restriction et prolongée d'une fonction
📖 p. 9

2.3 Fonction positive, négative
📖 p. 9

2.4 Comparaison de deux fonctions
📖 p. 10

2.5 Fonction minorée, fonction majorée, fonction bornée
📖 p. 11

Remarque :
Si une fonction f est minorée, elle admet une infinité de minorants. On s'intéresse alors au plus grand minorant.
De même, si une fonction f est majorée, elle admet une infinité de majorants. On s'intéresse alors au plus petit majorant.

Exemple :
Soit f une fonction telle que $-10 \leq f(x) \leq 30$ → -10 est un minorant et 30 est un majorant.
On a alors aussi : $-1000 \leq f(x) \leq 1000$ → -1000 est aussi un minorant et 1000 aussi un majorant.
Mais les renseignements compris dans « $-10 \leq f(x) \leq 30$ » sont plus précis que ceux dans « $-1000 \leq f(x) \leq 1000$ », d'où l'intérêt de s'intéresser au plus petit majorant et au plus grand minorant.

2.6 Exemples

a) Est-ce que les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$ et $g(x) = x - 3$ sont égales ?

• domaine de f
condition : $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$
dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

• domaine de g
dom g = $\mathbb{R}$

donc $f \neq g$ car les deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition.

Remarque :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\right) : f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x - 3 = g(x)$$

On dit que : f est **la restriction** de g sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ *(restriction, car le domaine est plus petit)*
g est **la prolongée** de f sur $\mathbb{R}$. *(prolongée, car le domaine est plus grand)*

b) Est-ce que les fonctions $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}$ et $g(x) = \sqrt{x+2} - 1$ sont égales ?

• domaine de f
conditions : (1) : $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$
(2) $\sqrt{x+2} + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \neq -1$ vrai!
dom f = $[-2\,;+\infty[$

• domaine de g
condition : $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$
dom g = $[-2\,;+\infty[$

$$\left(\forall x \in [-2;+\infty[\right) : f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1} \cdot \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}-1} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}-1\right)}{\sqrt{x+2}^{\,2} - 1^2} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}-1\right)}{(x+1)} = \sqrt{x+2} - 1 = g(x)$$

donc f = g.

3 Opérations sur les fonctions

3.1 Somme ou différence de deux fonctions
📖 : 1.4 pp. 15, 16 - 1.5 pp. 16, 17

3.2 Produit ou quotient de deux fonctions
📖 : 1.6 pp. 18, 19

4 Composée de deux fonctions

4.1 Définition

Soit f et g deux fonctions.
On appelle composée de f et g , on note $f \circ g$ et on lit « f rond g » la fonction définie par : $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

4.2 Domaine de définition

Pour pouvoir calculer $(f \circ g)(x)$, il faut que : $x \in \text{dom } g$ et $g(x) \in \text{dom } f$.

Exemple :

Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = x^2 + 3x$.
Déterminer dom f, dom g et dom $(f \circ g)$, puis calculer $(f \circ g)(x)$

• domaine de f :
condition : $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$
dom f = $[-2 ; +\infty[$

• domaine de g :
dom g = $\mathbb{R}$

• domaine de $f \circ g$:
condition : $g(x) \in \text{dom } f$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x \geq -2$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0$

a = 1
b = 3
c = 2

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \rightarrow$ 2 racines

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \dfrac{-3+1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \dfrac{-3-1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x^2 + 3x + 2$		+	0	−	0	+	

donc dom $(f \circ g) =]-\infty ; -2[\cup [-1 ; +\infty[$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 3x) = \sqrt{x^2+3x+2}$

4.3 Décompositions de fonctions

Parfois il peut s'avérer utile de procéder en sens inverse, c.-à-d. de décomposer une fonction en fonctions usuelles « simples ». Ce sont les fonctions suivantes :

$x \mapsto ax+b \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad x \mapsto \dfrac{1}{x} \quad x \mapsto |x| \quad x \mapsto \cos x \quad x \mapsto \sin x \quad x \mapsto \tan x$

Exemples :

Décomposer f en composée fonctions usuelles si a) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ et b) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}+5}$

a) Pour calculer f(x), on calcule
• d'abord le carré de x, $(x \mapsto x^2)$
• puis on rajoute 3 $(x \mapsto x + 3)$
• et ensuite on extrait la racine carrée. $(x \mapsto \sqrt{x})$

donc $f(x) = (i \circ h \circ g)(x)$ avec $g : x \mapsto x^2$, $h : x \mapsto x + 3$ et $i : x \mapsto \sqrt{x}$.

b) De même, pour calculer f(x), on calcule d'abord la racine carrée de x, puis on multiplie par 2 et rajoute 5, ensuite on prend l'inverse et finalement on multiplie par 3.

donc $f(x) = (j \circ i \circ h \circ g)(x)$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto 2x + 5$, $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $j : x \mapsto 3x$.

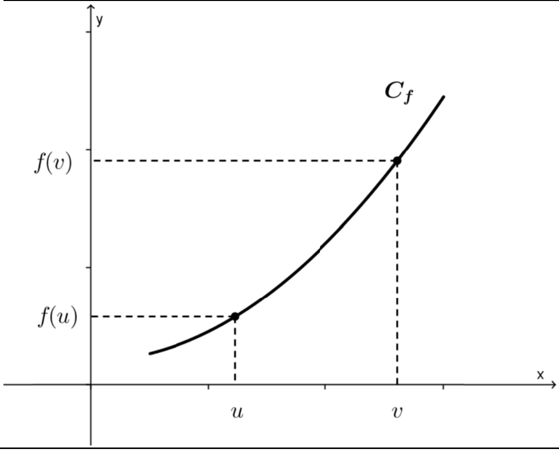
5 Réciproque d'une fonction

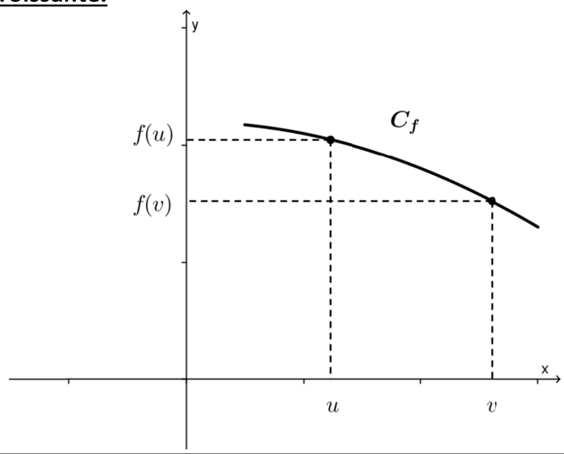
5.1 Définition et propriétés 📖 : pp. 22 - 24

5.2 Fonction injective. Fonction réciproque. 📖 : pp. 24, 25

6 Variations des fonctions

6.1 Fonction strictement croissante. Fonction strictement décroissante.





On dit que f est **strictement croissante** sur un intervalle I si pour tous nombres u et v de l'intervalle I on a : **si u < v alors f(u) < f(v)**	On dit que f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si pour tous nombres u et v de l'intervalle I on a : **si u < v alors f(u) > f(v)**

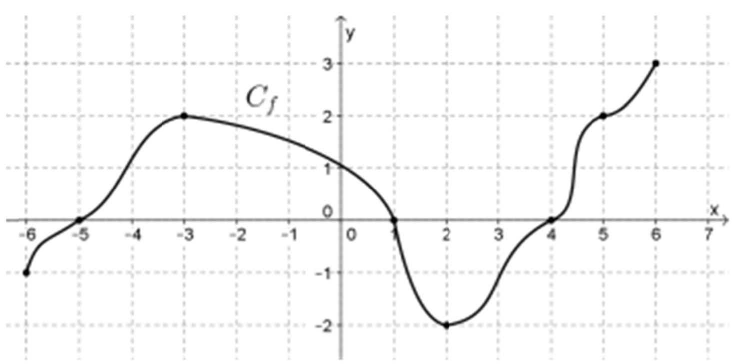
Remarque :
En remplaçant les inégalités strictes (< et >) par des inégalités larges (≤ et ≥) on obtient la définition des fonctions croissantes et décroissantes. *(donc sans « strictement »)*

6.2 Fonction constante. Fonction monotone.

On dit que f est **constante** sur un intervalle I si pour tous nombres u et v de l'intervalle I on a : f(u) = f(v)

On dit que f est (strictement) **monotone** sur un intervalle I si elle est soit (strictement) croissante sur cet intervalle, soit (strictement) décroissante sur cet intervalle.

6.3 Exemple
Soit f la fonction représentée sur le graphique ci-dessous.
• f est strictement croissante sur [−6 ; −3] et sur [2 ; 6].
• f est strictement décroissante sur [−3 ; 2] et sur [2 ; 6].
• f est strictement monotone sur [−6 ; −3], sur [−3 ; 2] et sur [2 ; 6].
• f n'est pas monotone sur [−6 ; 6] (car f y est d'abord croissante, ensuite décroissante et à nouveau croissante)



7. Éléments de symétrie d'une courbe

7.1 Fonction paire. Fonction impaire.

Soit f une fonction définie sur dom f.

f est paire $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{dom } f \Rightarrow -x \in \text{dom } f \\ (\forall x \in \text{dom } f) : f(-x) = f(x) \end{cases}$

f est impaire $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{dom } f \Rightarrow -x \in \text{dom } f \\ (\forall x \in \text{dom } f) : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Propriété :

Si f est paire, G_f est symétrique admet l'axe des ordonnées (Oy) comme axe de symétrie.

Si f est impaire, alors G_f admet l'origine O comme centre de symétrie.

7.2 Axe de symétrie

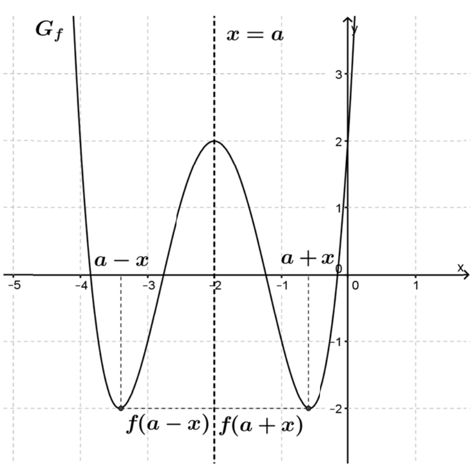
Soit f une fonction définie sur dom f.

Le graphe G_f admet la droite d'équation x = a comme **axe de symétrie** $\Leftrightarrow \begin{cases} a+x \in \text{dom } f \Rightarrow a-x \in \text{dom } f \\ (\forall x \in \text{dom } f) : f(a+x) = f(a-x) \end{cases}$

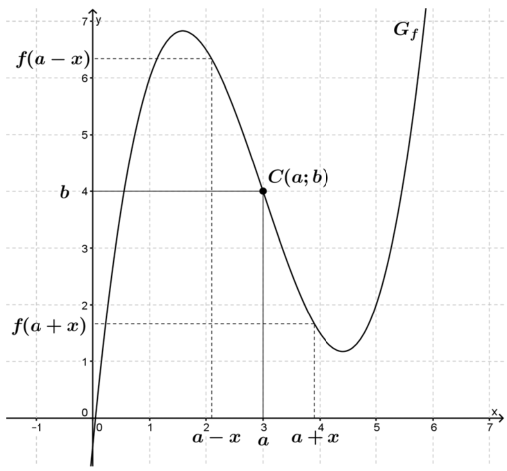
7.3 Centre de symétrie

Soit f une fonction définie sur dom f.

Le graphe G_f admet le point de coordonnées (a ; b) comme centre de symétrie $\Leftrightarrow \begin{cases} a+x \in \text{dom } \mathbf{f} \Rightarrow a-x \in \text{dom } f \\ (\forall x \in \text{dom } f) : \dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2} = b \end{cases}$



axe de symétrie x = a



centre de symétrie (a ; b)

7.4 Exemples

1) Déterminer le domaine et la parité des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 3}{|x|} \qquad g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 3}{x} \qquad h : x \mapsto \dfrac{2x - 3}{x^2}$

• dom f = dom g = dom h = $\mathbb{R}^*$, donc si x appartient au domaine, il en est de même pour −x.

• ($\forall$ x $\in$ dom f) : f(−x) = $\dfrac{2(-x)^2 - 3}{|-x|} = \dfrac{2x^2 - 3}{|x|} = f(x)$, donc f est paire.

• ($\forall$ x $\in$ dom g) : g(−x) = $\dfrac{2(-x)^2 - 3}{-x} = \dfrac{2x^2 - 3}{-x} = -\dfrac{2x^2 - 3}{x} = -g(x)$, donc g est impaire.

• ($\forall$ x $\in$ dom h) : h(−x) = $\dfrac{2(-x) - 3}{(-x)^2} = \dfrac{-2x^2 - 3}{x^2}$, donc h(−x) ≠ h(x) et h(−x) ≠ −h(x) ; h est ni paire, ni impaire.

2) Montrer que la droite d'équation x = 2 est un axe de symétrie du graphe de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 7$.

($\forall$ x $\in \mathbb{R}$) : $f(2 + x) = (2 + x)^2 - 4(2 + x) + 7 = 4 + 4x + x^2 - 8 - 4x + 7 = x^2 + 3$

$f(2 - x) = (2 - x)^2 - 4(2 - x) + 7 = 4 - 4x + x^2 - 8 + 4x + 7 = x^2 + 3 = f(2 + x)$

Donc la droite d'équation x = 2 est un axe de symétrie de G_f.

3) Montrer que le graphe de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$ admet un centre de symétrie.

• domaine : condition : $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(si (a ; b) sont les coordonnées du centre de symétrie, le seul « candidat » pour a est 1, car le domaine doit être « symétrique par rapport à a »)

• $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$:

$$f(1+x) = \frac{(1+x)^2-5(1+x)+6}{1+x-1} = \frac{1+2x+x^2-5-5x+6}{x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$$

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^2-5(1-x)+6}{1-x-1} = \frac{1-2x+x^2-5+5x+6}{-x} = \frac{x^2+3x+2}{-x}$$

et $\dfrac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = \dfrac{\dfrac{x^2-3x+2}{x} - \dfrac{x^2+3x+2}{x}}{2} = \dfrac{\dfrac{-6x}{x}}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

Donc le point de coordonnées (1 ; –3) est un centre de symétrie du graphe de f.

8. Fonction périodiques

8.1 Définition

Soit f une fonction définie sur dom f et un réel T.

f est périodique de période T $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{dom } f \Rightarrow x+T \in \text{dom } f \\ (\forall x \in \text{dom } f) : f(x+T) = f(x) \end{cases}$

Remarque :

Si une fonction est périodique de période T, elle est aussi périodique de période kT, $k \in \mathbb{Z}$.

Si on détermine la période d'une fonction, on s'intéresse bien sûr à la plus petite.

8.2 Exemples

1) Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π ; les fonctions tan et cot sont périodiques de période π.

2) Déterminer le domaine la plus petite période des fonctions $f : x \mapsto \cos(3x + 4)$ et $g : x \mapsto 2\tan(\dfrac{3x}{4}+1)$.

• dom f = $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$: f(x + T) = cos(3(x+T) + 4) = cos(3x + 4 + 3T).

On sait que la plus petite période de la fonction cos est 2π, donc $3T = 2\pi \Leftrightarrow T = \dfrac{2\pi}{3}$.

• condition : $\dfrac{3x}{4}+1 \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{4} \neq \dfrac{\pi}{2}-1+k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

dom g = $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$(\forall x \in \text{dom } g)$: $g(x + T) = 2\tan(\dfrac{3(x+T)}{4}+1) = 2\tan(\dfrac{3x}{4}+1+\dfrac{3T}{4})$

On sait que la plus petite période de la fonction tan est π, donc $\dfrac{3T}{4} = \pi \Leftrightarrow T = \dfrac{4\pi}{3}$.