

Exercice 165

dans les cas suivants le calcul de la limite n'a pas de sens car $a \notin \text{dom } f$ et a n'est pas une borne de $\text{dom } f$:

- 1) --- 2) en 1 3) en -1, en 0

Exercice 166

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
 2) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ n'existe pas ; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$
 3) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$
 4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

Exercice 168

- 1) 9 ; 2) 12 ; 3) n'existe pas ; 4) 2 ; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0

Exercice 169

- 1) 2 ; courbe privée du point $(-1 ; 2)$

- 2) 0 ; courbe privée du point $(1 ; 0)$

- 3) $\frac{5}{12}$; courbe privée du point $(\frac{3}{2} ; \frac{5}{12})$

- 4) -8 ; courbe privée du point $(2 ; -8)$

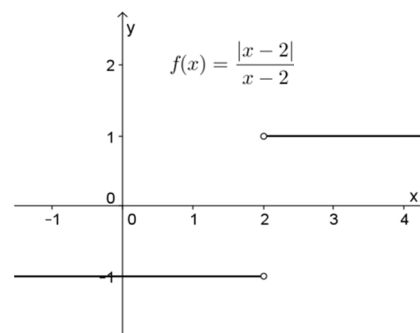
- 5) $\frac{4}{3}$; courbe privée du point $(-1 ; \frac{4}{3})$

- 6) 0 ; courbe privée du point $(2 ; 0)$

- 7) $\frac{1}{4}$; courbe privée du point $(2 ; \frac{1}{4})$

- 8) $\frac{9}{8}$; courbe privée du point $(2 ; \frac{9}{8})$

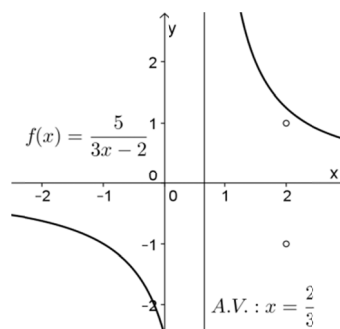
- 9) à gauche : -1 ; à droite : 1 ; courbe sans point d'abscisse 2 \rightarrow

**Exercice 171**

- 1) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{5}{3x-2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \frac{5}{3x-2} = -\infty$

- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{5}{3x-2}$ n'existe pas, car $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{5}{3x-2} \neq \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \frac{5}{3x-2}$

- 3) asymptote verticale d'équation $x = \frac{2}{3}$

**Exercice 172**

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3}{1-2x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3}{1-2x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3}{1-2x}$ n'existe pas.

- asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$

Exercice 174

- 1) $-\infty$ / A.V. : $x = -3$ 4) $2x$ / courbe privée du point $(0 ; 2x)$
 2) en $\frac{\pi^+}{2} : -\infty$ / en $\frac{\pi^-}{2} : +\infty$ / A.V. : $x = \frac{\pi}{2}$ 5) en $2^+ : -\infty$ / en $2^- : +\infty$ / A.V. : $x = 2$
 3) en $-\frac{\pi^+}{4} : -\infty$ / en $-\frac{\pi^-}{4} : +\infty$ / A.V. : $x = -\frac{\pi}{4}$ 6) $-\infty$ / A.V. : $x = 3$

Exercice 175

1 : B / 2 : C / 3 : A, E / 4 : D

Exercice 177

- 1) 4 / courbe privée du point $(0 ; 4)$ 4) -1 / courbe privée du point $(0 ; -1)$
 2) 1 / courbe privée du point $(0 ; 1)$ 5) $-\frac{1}{2}$ / courbe privée du point $(0 ; -\frac{1}{2})$
 3) $\frac{2}{3}$ / courbe privée du point $(0 ; \frac{2}{3})$ 6) en $\frac{\pi^+}{2} : +\infty$ / en $\frac{\pi^-}{2} : -\infty$ / A.V. : $x = \frac{\pi}{2}$

Exercice 182

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ n'existe pas

Exercice 183

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ / A.H.G. : $y = 2$ et A.H.D : $y = 2$
 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ / A.H.G. : $y = 2$ et A.H.D : $y = 2$
 4) les fonctions périodiques n'ont pas de limite en l'infini
 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ / A.H.G. : $y = 0$ et A.H.D : $y = 0$
 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ n'existe pas / A.H.G. : $y = 0$
 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ / A.H.G. : $y = \frac{1}{2}$ et A.H.D : $y = \frac{1}{2}$
 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ / A.H.G. : $y = -4$ et A.H.D : $y = 4$
 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ / A.H.G. : $y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ et A.H.D : $y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$
 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ / A.H.G. : $y = -3$ et A.H.D : $y = 3$
 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ / A.H.G. : $y = -4$ et A.H.D : $y = 4$

Exercice 185

- 1) • A.V. : $x = -1$ avec $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
 • A.H.G. et A.H.D. : $y = 1$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
 2) • A.V. : $x = 1$ avec $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
 • A.O.G. et A.O.D. : $y = x$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$
 3) • A.V. : $x = -2$ avec $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$
 • A.V. : $x = 1$ avec $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
 • A.H.G. : $y = 1$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
 • A.H.D. : $y = -3$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

Exercice 186

- 1) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ pas d'A.H.
- 2) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ donc A.H.G. et A.H.D. : $y = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ donc A.V. : $x = -2$
- 3) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ donc A.H.G. et A.H.D. : $y = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc A.V. : $x = 0$
- 4) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ pas d'A.H.
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ donc A.V. : $x = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ donc A.V. : $x = 2$
- 5) • fonction périodique \rightarrow pas d'A.O. ni d'A.H.
- $\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) = +\infty$ donc A. V. : $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} f(x) = -\infty$ donc A. V. : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 6) • fonction périodique \rightarrow pas d'A.O. ni d'A.H.
- $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + k\pi)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + k\pi)^+} f(x) = -\infty$ donc A. V. : $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 7) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc A.H.G. et A.H.D. : $y = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ donc A.V. : $x = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ donc A.V. : $x = 2$
- 8) • fonction périodique \rightarrow pas d'A.O. ni d'A.H.
- $\lim_{x \rightarrow (\frac{k\pi}{2})^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{k\pi}{2})^+} f(x) = +\infty$ donc A. V. : $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 0$ donc courbe privée des points $(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 189

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = -3$ donc A.O.G. et A.O.D. : $y = x - 3$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 2$ donc A.O.G. et A.O.D. : $y = x + 2$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$ donc A.O.G. et A.O.D. : $y = 2x - 1$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ donc pas d'A.O. (mais A.H.G. et A.H.D. : $y = 2$)
- 5) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + 2x] = 2$ donc A.O.G. : $y = -2x + 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] = -2$ donc A.O.D. : $y = 2x - 2$
- 6) $\text{dom } f = [-2; 2]$, donc pas définie à l'infini \rightarrow pas d'A.O.
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ donc pas d'A.O. (mais A.H.G. et A.H.D. : $y = 0$)

Exercice 190

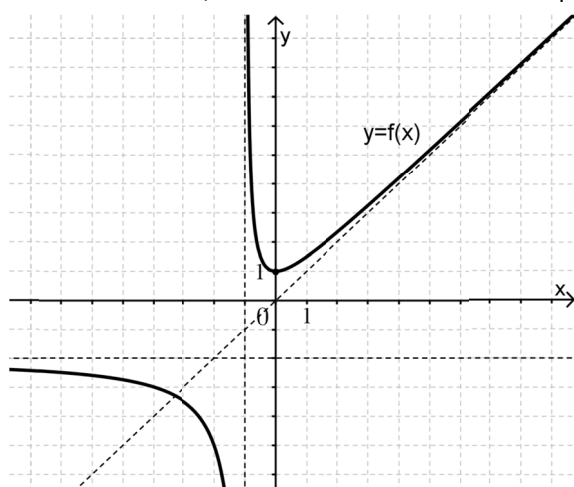
A4 / B1 / C6 / D5 / E3 / F2

Pour s'autocontrôler... (corrigé dans le livre)

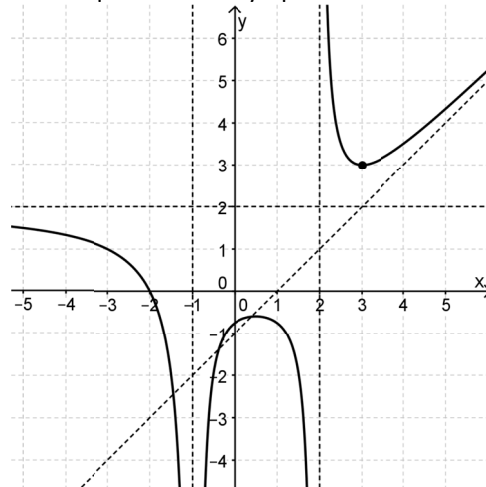
exercices 193, 194, 196, 197, 198

Quelques exercices supplémentaires**Exercice A**

Déterminer dom f, les limites aux « endroits » indiqués ainsi que le genre et une équation des asymptotes :



① limites en : $-\infty$, -1^- , -1^+ , -1 , 0 , $+\infty$



② limites en : $-\infty$, -1 , 2^- , 2^+ , 2 , 3 , $+\infty$

Exercice B

Associer expressions analytiques et graphes, sachant qu'une des six expressions analytiques ne correspond pas à un graphe. Donner ensuite l'expression analytique manquante.

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$$

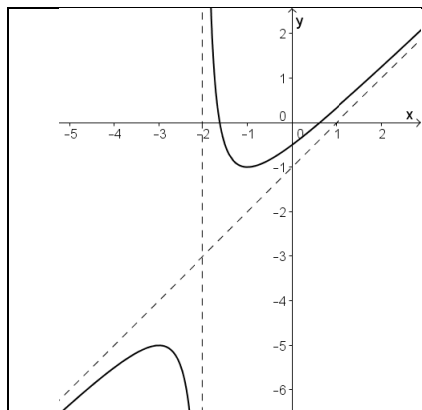
$$g(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}$$

$$h(x) = x + 1 + \frac{1}{x+2}$$

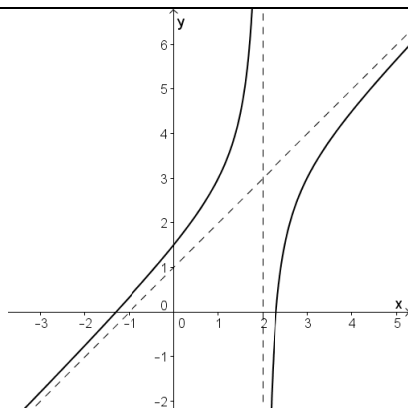
$$i(x) = x + 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$j(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$$

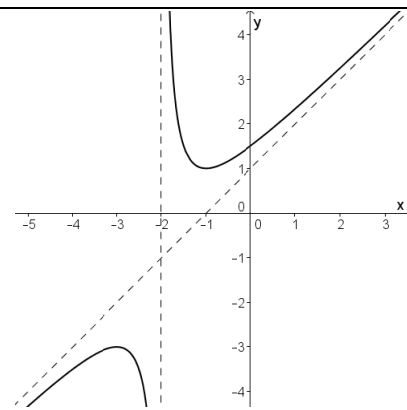
$$k(x) = x - 1 - \frac{1}{x+2}$$



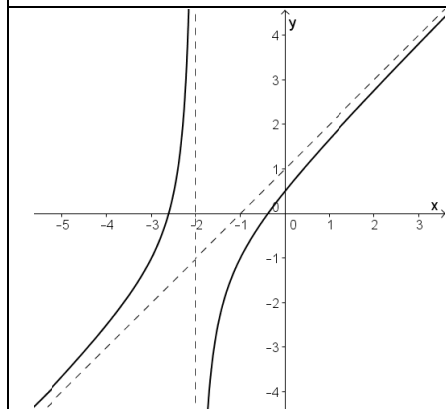
①



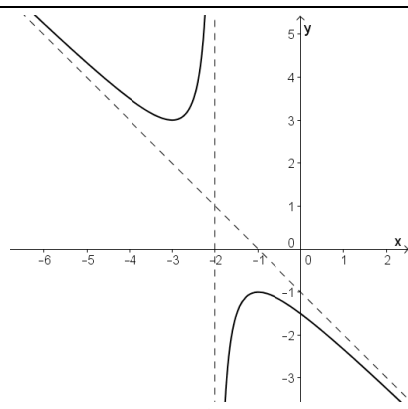
②



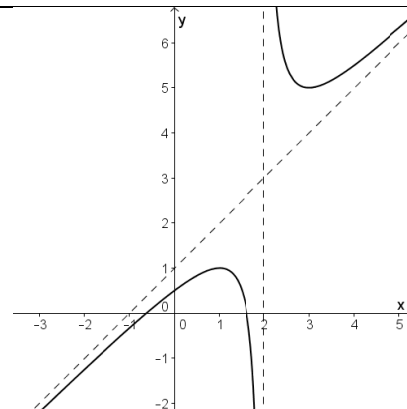
③



④



⑤



⑥

Exercice C

Esquisser un graphe possible et indiquer le genre et une équation des asymptotes de la fonction f dans les cas suivants.

a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 / \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty / \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 / \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 3$$

b) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-4; -3; 2\} / f(0) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 / \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 1 / \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty / \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 / \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 / \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty / \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$$

Corrigé A

① $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 / \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty / \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ n'existe pas} / \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 / \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

A.H.G. : $y = -2$ / A.V. : $x = -1$ / A.O.D. : $y = x$

② $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 / \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty / \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty / \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ n'existe pas} / \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 / \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

A.H.G. : $y = 2$ / A.V. : $x = -1$ / A.V. : $x = 2$ / A.O.D. : $y = x - 1$

Corrigé B

• Les fonctions sont toutes sous la forme $ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$, donc $y = ax + b$ est une équation de l'A.O.

Une équation de l'A.O. des fonctions f, g, h et i est donc $y = x + 1$ et celle des fonctions j et k a comme équation $y = x - 1$.

• Le domaine des 6 fonctions est \mathbb{R} privé d'une valeur a : le dénominateur s'annule en a et l'A.V. a comme équation $x = a$.
Pour les fonctions f et g cette valeur est 2 et pour les autres -2.

① A.O. : $y = x - 1$ / A.V. : $x = -2 \rightarrow$ fonction j ou $k \rightarrow$ on a $j(0) = -0,5$ et $k(0) = -1,5 \rightarrow$ fonction j

② A.O. : $y = x + 1$ / A.V. : $x = 2 \rightarrow$ fonction f ou $g \rightarrow$ on a $f(0) = 0,5$ et $g(0) = 1,5 \rightarrow$ fonction g

③ A.O. : $y = x + 1$ / A.V. : $x = -2 \rightarrow$ fonction h ou $i \rightarrow$ on a $h(0) = 1,5$ et $i(0) = 0,5 \rightarrow$ fonction h

④ A.O. : $y = x + 1$ / A.V. : $x = -2 \rightarrow$ fonction h ou $i \rightarrow$ fonction i (car h est déjà prise)

⑤ A.O. : $y = -x - 1$ / A.V. : $x = -2 \rightarrow$ aucune des fonctions

proposition : $l(x) = -x - 1 + \frac{1}{x+2}$ ou $m(x) = -x - 1 - \frac{1}{x+2} \rightarrow l(0) = -0,5$ et $m(0) = -1,5 \rightarrow$ fonction m

⑥ A.O. : $y = x + 1$ / A.V. : $x = 2 \rightarrow$ fonction f ou $g \rightarrow$ fonction f (car g est déjà prise)

Corrigé C