

1 Limite en un point (partie théorique)**1.1 Limite « plus l'infini » en un point**

a) Soit la fonction $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$.

On a : $\text{dom } f = \mathbb{R}^*$

Intéressons-nous à ce qui se passe si x prend des valeurs de plus en plus proches de 0 :

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,000001	0,000001	0,001	0,01	0,1
$f_1(x)$	100	10000	1000000	10^{12}	10^{12}	1000000	10000	100

b) Soit la fonction $f_2 : x \rightarrow \left| \frac{2}{x-2} \right|$.

On a : $\text{dom } f_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Intéressons-nous à ce qui se passe si x prend des valeurs de plus en plus proches de 2 :

x	1,9	1,99	1,999	1,999999	2,000001	2,001	2,01	2,1
$f_2(x)$	20	200	2000	2000000	2000000	2000	200	20

Dans les deux cas, on a :

Si

$f(x)$ tend à devenir plus grand que n'importe quel réel positif lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , mais distinctes de a ,

alors

la limite de f , lorsque x tend vers a , est « plus l'infini ».

on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Pour mieux comprendre :

$$|x - a| < \delta$$

$$\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta$$

$$\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$$

$$\Leftrightarrow x \in]a - \delta; a + \delta[$$

Donc plus δ est petit, plus x est proche de a .

Définition

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \delta > 0) : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

(pour tout réel strictement positif A - aussi grand qu'il soit - il est possible de déterminer un réel strictement positif δ tel que si $|x - a| < \delta$, alors $f(x) > A$)

Revenons à la fonction $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$:

$$f_1(x) > A$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > A \quad | \cdot x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > Ax^2 \quad | : A > 0$$

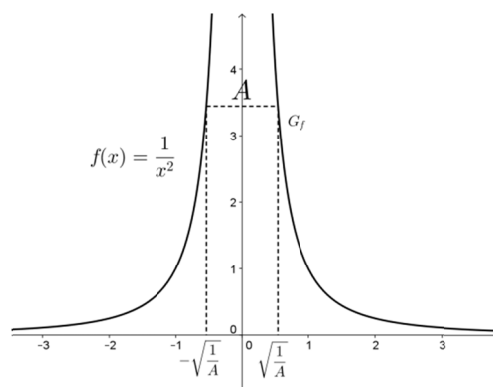
$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{A}} < x < \sqrt{\frac{1}{A}}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{A}}$$

$$\text{donc } |x - 0| < \delta, \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{1}{A}}.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = +\infty$.



1.2 Limite « moins l'infini » en un point**Si**

$f(x)$ tend à devenir plus petit que n'importe quel réel négatif lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , mais distinctes de a ,

alors

la limite de f , lorsque x tend vers a , est « moins l'infini ».

on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Définition

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0)(\exists \delta > 0) : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$$

(pour tout réel strictement négatif A - aussi grand que $|A|$ soit - il est possible de déterminer un réel strictement positif δ tel que si $|x - a| < \delta$, alors $f(x) < A$)

1.3 Limite finie en un point**cas si $a \notin \text{dom } f$**

Soit la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

On a : $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Intéressons-nous à ce qui se passe si x prend des valeurs de plus en plus proches de 1 :

x	0,9	0,99	0,999	0,999999	1,000001	1,001	1,01	1,1
$f_1(x)$	1,9	1,99	1,999	1,999999	2,000001	2,001	2,01	2,1

on a : $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 2$

cas si $a \in \text{dom } f$

Soit la fonction $f_2 : x \mapsto x^2 - 3x$.

On a : $\text{dom } f_2 = \mathbb{R}$

Intéressons-nous à ce qui se passe si x prend des valeurs de plus en plus proches de 2 :

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f_2(x)$	-2,09	-2,0099	-2,000999	-1,998999	-1,9899	-1,89

on a : $\lim_{x \rightarrow 2} f_2(x) = -2$. Comme f_2 est définie en 2, cette limite vaut bien évidemment $f_2(2)$.

Si

$f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de b lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , mais distinctes de a ,

alors

la limite de f , lorsque x tend vers a , est b

on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Définition

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

1.4 Limite à gauche en un point. Limite à droite en un point.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x-3}$.

On a : $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Rapprochons-nous de 3 par la gauche...

et par la droite.

x	2,9	2,99	2,999	2,99999	3,000001	3,001	3,01	3,1
f(x)	-30	-300	-3000	-3000000	3000000	3000	300	30

Notation :

Pour signaler qu'on calcule la limite à droite de a, on note $x \rightarrow a^+$ et à gauche de a, on note $x \rightarrow a^-$.

Définitions

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \delta > 0) : a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \delta > 0) : a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0)(\exists \delta > 0) : a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0)(\exists \delta > 0) : a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < A$$

Ainsi, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x-3}$, on a :

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$. Mais que vaut alors $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

Existence d'une limite en un point a

	f définie à droite de a (en a^+)	f pas définie à droite de a (en a^+)
f définie à gauche de a (en a^-)	<ul style="list-style-type: none"> si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égal à cette limite si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas 	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égal à $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
f pas définie à gauche de a (en a^-)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égal à $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	<ul style="list-style-type: none"> si f est définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et vaut f(a) si f n'est pas définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas

Ainsi, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x-3}$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ n'existe pas.

1.5 Limites des fonctions usuelles  p. 70**1.6 Opérations sur les fonctions**  pp. 71 à 73, 77 à 79**1.7 Théorème du sandwich**  pp. 80 et 81**1.8 Limites trigonométriques particulières**  pp. 82 et 83

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

2 Limite en un point a (partie pratique)**2.1 Limite en un point a de dom f**

si f est définie en a, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemples :

Calculer le domaine et les limites aux points indiqués des fonctions définies par :

$$\text{a) } f(x) = 2x^2 + 5x - 4 \quad \text{en } 2, \text{ en } -3 \qquad \text{b) } f(x) = \frac{3x}{x+4} \quad \text{en } 0, \text{ en } 8$$

2.2 Limite en un point a qui n'appartient pas à dom fRemarque :

Le calcul d'une limite en un point qui n'appartient pas au domaine de la fonction n'a un sens que si « a est une borne du domaine », donc si cette fonction est définie à droite et/ou à gauche de a.

Le domaine de la fonction est donc p.ex. sous la forme $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $]a; b[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; a[$...

Exemples :

$$\begin{array}{ll} \text{c) } f(x) = \frac{-5}{x^4} & \text{en } 0 \\ \text{d) } f(x) = \frac{3x+1}{2x-1} & \text{en } \frac{1}{2} \\ \text{e) } f(x) = \frac{5x}{x^2-3} & \text{en } \sqrt{3}, \text{ en } -\sqrt{3} \\ \text{f) } f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2-3x-10} & \text{en } 5, \text{ en } -2 \\ \text{g) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}} & \text{en } -3 \\ \text{h) } f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{x-2}} & \text{en } 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{i) } f(x) = \frac{3x-2}{3-\sqrt{2x+1}} & \text{en } 4 \\ \text{j) } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2} & \text{en } 2 \\ \text{k) } f(x) = \frac{1-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+2}-1} & \text{en } -1 \\ \text{l) } f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{x-5}} & \text{en } 5 \\ \text{m) } f(x) = \frac{\tan x}{x} & \text{en } 0 \\ \text{n) } f(x) = \frac{2x}{1+\cos x} & \text{en } \pi \end{array}$$

Petite synthèse

- « $\frac{n}{0}$ » avec $n \neq 0 \rightarrow$ déterminer le signe de n et de 0 (0^+ ou 0^-) à gauche et à droite \rightarrow limite infinie
- « $\frac{0}{0}$ » \rightarrow forme indéterminée \rightarrow factoriser numérateur et dénominateur, puis simplifier
 \rightarrow amplifier par une racine carrée, par l'expression conjuguée, puis simplifier
 \rightarrow utiliser les limites trigonométriques particulières

Remarques :

a) « $\frac{0}{0}$ » est appelée une forme indéterminée, car on peut obtenir une limite finie ou infinie.

On rencontre p. ex. cette forme dans les trois cas (simples) suivants, mais le résultat est chaque fois un autre :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ n'existe pas car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

b) « $\frac{n}{0}$ » avec $n \neq 0$ n'est pas une forme indéterminée, car on obtient toujours une limite infinie.

3 Limites en l'infini (partie théorique)

3.1 Limite finie en l'infini

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-1}{2x+5}$. $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

Intéressons-nous à ce qui se passe si x prend des valeurs positives de plus en plus grandes...

x	10	100	1000	1000000
f(x)	1,56	≈ 1,9463	≈ 1,9945	≈ 1,9999

...et des valeurs négatives de plus en plus petites (donc négatives et de plus en plus grandes en valeur absolue):

x	-10	-100	-1000	-1000000
f(x)	≈ 2,7333	≈ 1,9463	≈ 1,9945	≈ 1,9999

Dans les deux cas, $f(x)$ semble se rapprocher de plus en plus de 2 et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

Si

$f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de b

lorsque x prend des valeurs plus grandes (*resp. petites*) que n'importe quel réel positif (*resp. négatif*)

alors

la limite de f , lorsque x tend vers plus (*resp. moins*) l'infini, est b

on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Définitions

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N < 0) : x < N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0) : x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

3.2 Limite infinie en l'infini

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7x + 5$. $\text{dom } f = \mathbb{R}$

Intéressons-nous à ce qui se passe si x prend des valeurs positives de plus en plus grandes...

x	10	100	1000	1000000
f(x)	35	9305	993005	≈ 9,9 · 10 ¹¹

...et des valeurs négatives de plus en plus petites (donc négatives et de plus en plus grandes en valeur absolue):

x	-10	-100	-1000	-1000000
f(x)	175	10705	1007005	≈ 1,0 · 10 ¹²

Dans les deux cas, $f(x)$ semble devenir de plus en plus grand et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Si

$f(x)$ tend à devenir plus grand (*resp. plus petit*) que n'importe quel réel positif (*resp. négatif*)

lorsque x prend des valeurs plus grandes (*resp. petites*) que n'importe quel réel positif (*resp. négatif*)

alors

la limite de f , lorsque x tend vers plus (*resp. moins*) l'infini, est $+\infty$ (*resp. $-\infty$*)

on note : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Définitions

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0)(\exists N < 0) : x < N \Rightarrow f(x) < A$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0)(\exists N > 0) : x > N \Rightarrow f(x) < A$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N < 0) : x < N \Rightarrow f(x) > A$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N > 0) : x > N \Rightarrow f(x) > A$

3.3 Limites des fonctions usuelles pp. 94 à 97

3.4 Opérations sur les fonctions pp. 97 à 98

3.5 Limite en l'infini d'un polynôme

La limite d'une fonction polynôme en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) est égale à la limite du terme de plus haut degré de ce polynôme.

Démonstration :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \quad n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_2 x^2}{a_n x^n} + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \left(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n x^1}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_2}{a_n x^{n-2}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{a_0}{a_n x^n}}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \end{aligned}$$

3.6 Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur de cette fonction rationnelle.

Démonstration :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \right) \quad n, p \in \mathbb{N}^*, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, b_p \neq 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \left(\frac{1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_2 x^2}{a_n x^n} + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{p-1} x^{p-1}}{b_p x^p} + \dots + \frac{b_2 x^2}{b_p x^p} + \frac{b_1 x}{b_p x^p} + \frac{b_0}{b_p x^p}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \left(\frac{1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n x^1}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_2}{a_n x^{n-2}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{a_0}{a_n x^n}}_{\rightarrow 0}}{1 + \underbrace{\frac{b_{p-1}}{b_p x^1}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\frac{b_2}{b_p x^{p-2}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{b_1}{b_p x^{p-1}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{b_0}{b_p x^p}}_{\rightarrow 0}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \end{aligned}$$

Remarques :

- si $n > p$, alors la limite est infinie
- si $n = p$, alors la limite vaut $\frac{a_n}{b_p}$
- si $n < p$, alors la limite est 0

4 Limites en l'infini (partie pratique)

Déterminer le domaine et les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$ si elles y sont définies :

a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$

h) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

b) $f(x) = -\frac{5}{x^4}$

i) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 11x + 5}$

c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - x + 7$

j) $f(x) = \frac{1-6x}{\sqrt{2x^2-x-3}}$

d) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$

k) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-7-3}}$

e) $f(x) = \frac{11x+1}{6x^2+x-1}$

l) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

f) $f(x) = \frac{9x^2+2x+7}{3x^2+5x-9}$

m) $f(x) = \sqrt{2x^2+5} - \sqrt{x^2+4x+3}$

g) $f(x) = \frac{3x^2-5x-7}{6x+7}$

n) $f(x) = \sqrt{4x^2-1} - 2\sqrt{x^2+4x+4}$

utile à savoir

- fonctions polynômes en l'infini : ne garder que le terme de plus haut degré (3.5)
- fonctions rationnelles en l'infini : ne garder que les termes de plus haut degré au numérateur et dénominateur (3.6)
- $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \text{ (donc si } x \rightarrow +\infty) \\ -x & \text{si } x < 0 \text{ (donc si } x \rightarrow -\infty) \end{cases}$
- formes indéterminées : « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\infty - \infty$ », « $\infty \cdot 0$ », « $0 \cdot \infty$ »
→ il faut lever ces indéterminations par les méthodes adéquates (factoriser, conjugué,...)
- « $\frac{0}{\infty}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » ne sont pas des formes indéterminées ! (en effet : « $\frac{0}{\infty} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0$ » et « $\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$ »)

5 Interprétation graphique

Remarque : dans ce qui suit « ∞ » signifie soit « $-\infty$ », soit « $+\infty$ ».

5.1 Limite infinie en un point \rightarrow asymptote verticale

Si $a \notin \text{dom } f$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ et/ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ et/ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,
alors la courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

5.2 Limite finie en l'infini \rightarrow asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ alors la courbe C_f admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = a$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ alors la courbe C_f admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = a$.

Exemple :

Déterminer les limites aux bornes du domaine de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2}$. Interpréter graphiquement les résultats.

C.E. : $x^2 + x - 2 \neq 0$

$$a = 1 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$b = 1$$

$$c = -2 \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{donc } \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \rightarrow \text{A.H.G. : } y = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \rightarrow \text{A.H.D. : } y = 2$$

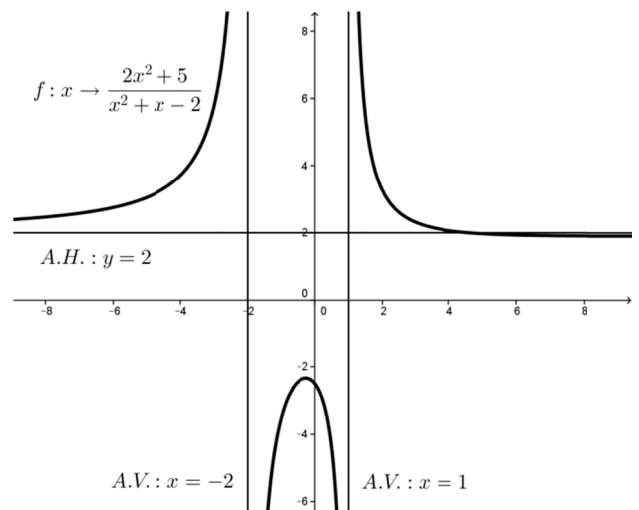
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} \rightarrow \text{il faut distinguer les limites en } 1^+ \text{ et } 1^-$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} = -\infty \rightarrow \text{A.V. : } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} \rightarrow \text{il faut distinguer les limites en } -2^+ \text{ et } -2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x - 2} = +\infty \rightarrow \text{A.V. : } x = -2$$



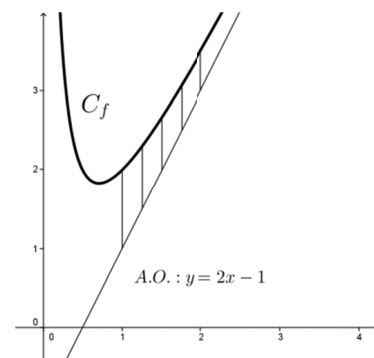
5.3 Limite infinie en l'infini → asymptote oblique ou branche parabolique

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la courbe C_f admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = ax + b$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la courbe C_f admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = ax + b$.

Remarques

- le fait que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ implique que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- $f(x) - (ax + b)$ représente la distance entre la courbe et l'asymptote pour un x donné →
- Cette définition est surtout utile si on connaît déjà l'équation d'une asymptote oblique éventuelle. Si on ne connaît pas cette équation on a recours à la méthode qui suit.



Détermination de l'équation d'une asymptote oblique

On a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b) \quad | : x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax + b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax}{x} \right) = a$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad || +b$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$$

En s'appuyant sur ces résultats, on utilise le procédé suivant, connu sous le nom de « formules de Cauchy » :

①	si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$		
②	si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) → on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$	si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
③	si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$	si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \infty$	
→	le graphe de f admet une <u>asymptote oblique</u> d'équation $y = ax + b$	le graphe de f n'admet pas d'asymptote oblique	
		le graphe de f admet une <u>branche parabolique</u> de direction $y = ax$	le graphe de f admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Oy)
			le graphe de f admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Ox)

Exemple :

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty \quad = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 5x - 2}{x(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \quad \leftarrow = a \quad \downarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 2 - 2x(x + 3)}{x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 6x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

donc C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ à droite et à gauche.

limite en un point a (a adhérent à dom f)**si $a \in \text{dom } f$**

→ remplacer x par a

si $a \notin \text{dom } f$: fonction du type $\frac{N(x)}{D(x)}$

→ remplacer x par a pour voir quelles valeurs prennent N(x) et D(x)

forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ »

→ amplifier éventuellement la fraction

$\begin{array}{c} N(x) \\ \hline D(x) \end{array}$	$P(x)$	$\sqrt{P(x)}$	$\sqrt{P(x)} \pm Q(x)$
$R(x)$		$\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{P(x)}}$	$\frac{\sqrt{P(x)} \pm Q(x)}{\sqrt{P(x)} \pm Q(x)}$
$\sqrt{R(x)}$	$\frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{R(x)}}$		$\frac{\sqrt{P(x)} \pm Q(x)}{\sqrt{P(x)} \pm Q(x)} \cdot \frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{R(x)}}$
$\sqrt{R(x)} \pm S(x)$	$\frac{\sqrt{R(x)} \pm S(x)}{\sqrt{R(x)} \pm S(x)}$	$\frac{\sqrt{R(x)} \pm S(x)}{\sqrt{R(x)} \pm S(x)} \cdot \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{P(x)}}$	$\frac{\sqrt{P(x)} \pm Q(x)}{\sqrt{P(x)} \pm Q(x)} \cdot \frac{\sqrt{R(x)} \pm S(x)}{\sqrt{R(x)} \pm S(x)}$

→ factoriser N(x) et D(x), puis simplifier par $(x - a)$ ou $\sqrt{x - a}$ → remplacer de nouveau x par a (→ possibilité de retomber sur « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{n}{0}$ »)

→ utiliser les limites trigonométriques particulières

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

« $\frac{n}{0}$ » avec $n \neq 0$ → calculer les limites à gauche (a^-) et à droite (a^+)

→ déterminer le signe de D(x) (éventuellement avec tableau des signes)

→ conclure :

	$n > 0$	$n < 0$
0^+	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$

ASYMPTOTE
VERTICALE

Remarque :

- P(x), Q(x), R(x) et S(x) sont des polynômes

limite en l'infini (pour autant que f y est définie)**❶ fonction polynôme $P(x)$ ou irrationnelle $\sqrt{P(x)}$** (evt. forme indéterminée « $\infty - \infty$ »)

→ la limite est celle du terme de plus haut degré

❷ fonctions du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$, $\frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$, $\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ ou $\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$ forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ »)→ ne garder que les termes de plus haut degré de $P(x)$ et $Q(x)$ → considérer éventuellement que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$, $\sqrt{x^3} = |x|\sqrt{x} = \begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -x\sqrt{x} & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$ et $\sqrt{x^4} = x^2$

→ simplifier, puis conclure

degré du numérateur > degré du dénominateur → limite infinie

ASYMPTOTE
OBLIQUE ?degré du numérateur > degré du dénominateur → limite finie ($\neq 0$)ASYMPTOTE
HORIZONTALE

degré du numérateur > degré du dénominateur → limite 0

❸ fonctions du type $\sqrt{P(x)} \pm Q(x)$, $P(x) \pm \sqrt{Q(x)}$ ou $\sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$ → ne garder que les termes de plus haut degré de $P(x)$ et $Q(x)$ → considérer que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$, $\sqrt{x^3} = |x|\sqrt{x} = \begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -x\sqrt{x} & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$ et $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$

→ mettre le terme de plus haut degré en évidence

« $n \cdot \infty$ »

→ limite infinie

	$n > 0$	$n < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

forme indéterminée « $0 \cdot \infty$ »→ multiplier par $\frac{\sqrt{P(x)} \mp Q(x)}{\sqrt{P(x)} \mp Q(x)}$, $\frac{P(x) \mp \sqrt{Q(x)}}{P(x) \mp \sqrt{Q(x)}}$ ou $\frac{\sqrt{P(x)} \mp \sqrt{Q(x)}}{\sqrt{P(x)} \mp \sqrt{Q(x)}}$

→ passer au cas ❷

Remarque :

- $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes