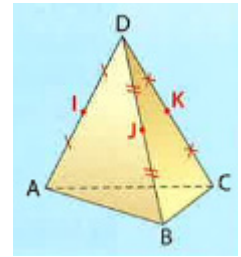


Exercice 1

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AD], J celui de [BD] et K celui de [CD].
Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

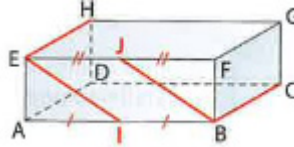
→

**Exercice 2**

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

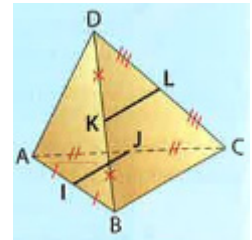
I est le milieu de l'arête [AB] et J le milieu de l'arête [EF].

- Démontrer que les droites (EI) et (JB) sont parallèles.
- En déduire que les plans (EHI) et (BCJ) sont parallèles.

**Exercice 3**

ABCD est un tétraèdre. I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [BD] et [CD].

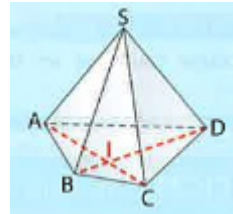
- Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
- Démontrer que la droite (BC) est parallèle au plan (AKL).

**Exercice 4**

Le solide SABCD est une pyramide de sommet S et de base ABCD.

Les droites (AC) et (BD) se coupent en I.

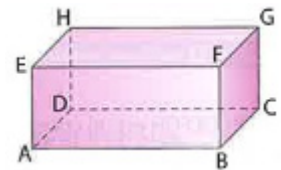
Quelle est l'intersection des plans (SAC) et (SBD) ?

**Exercice 5**

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

Déterminer l'intersection des plans suivants:

- (ABF) et (BCG)
- (CDH) et (EFG)
- (AEG) et (ADH)
- (BDH) et (CGH)

**Exercice 6**

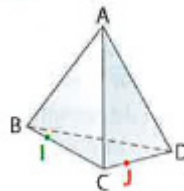
ABCD est un tétraèdre.

I est un point de [BC], distinct de B et C.

J est un point de [CD], distinct de C et D.

Déterminer les intersections des plans suivants:

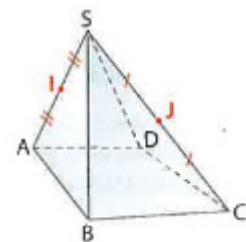
- (AIJ) et (ABC)
- (AIJ) et (BCD)

**Exercice 7**

SABCD est une pyramide de sommet S et de base ABCD.

Le point I est le milieu du segment [SA] et J celui du segment [SC].

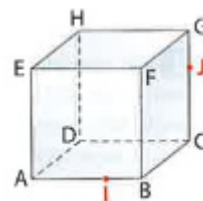
Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

**Exercice 8**

ABCDEFGH est un cube.

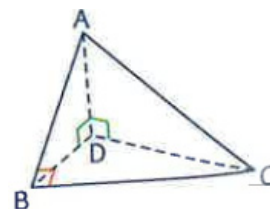
I est un point de l'arête [AB] et J est un point de l'arête [CG].

- Quelle est l'intersection des plans (AJB) et (GCI) ?
- a) Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (DHC).
- b) En déduire que la droite (AD) est orthogonale à la droite (HC).
3. Démontrer que la droite (HG) est orthogonale à la droite (AE).

**Exercice 9**

Dans un tétraèdre ABCD, les angles \widehat{ADB} , \widehat{ADC} et \widehat{ABC} sont droits.

- a) Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (BCD).
- b) En déduire que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales
2. a) Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ABD)
- b) En déduire que le triangle BCD est rectangle en B.



Exercice 10

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points : A(1 ; -2 ; 3), B(5 ; 0 ; 2), C(3 ; -3 ; 0) et D(0 ; -5 ; 4).

Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{CB} .

Exercice 11

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points : A(3 ; 2 ; 5), B(-4 ; 1 ; 0), C(7 ; -3) et D(0 ; -1 ; -1).

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ et $\vec{w} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AD}$.

b) Déterminer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DF} = \vec{0}$.

Exercice 12

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$)

Soit les points : A(5 ; 1 ; -2), B(-4 ; 4 ; 4), C(-1 ; 0 ; -1), D(2 ; -1 ; -3) et E(a ; b ; 6) (avec b un réel).

a) Est-ce que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ?

b) Déterminer les réels x et y pour que \vec{u} et \vec{w} soient colinéaires.

c) Est-ce que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires ?

d) Déterminer les réels a et b pour que \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{ED} soient colinéaires.

Exercice 13

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points : A(1 ; 3 ; -2), B(2 ; -1 ; 0), C(6 ; -3 ; -1), D(1 ; 3 ; -1), E(3 ; 6 ; -2) et F(0 ; 4 ; 0).

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle. Est-il équilatéral ?

b) Montrer que le triangle DEF est rectangle.

Exercice 14

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points : A(-4 ; 1 ; 2), B(-1 ; -1 ; 3), C(2 ; -3 ; 4), D(-5 ; 6 ; 1), E(4 ; 0 ; 4), F(-2 ; y ; 1) et G(x ; 2 ; -3).

a) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

b) Est-ce que les points A, D et E sont alignés ?

c) Est-ce que les droites (CD) et (EB) sont parallèles ?

d) Est-ce que les droites (AB) et (DE) sont parallèles ?

e) Déterminer les réels x et y pour que (FG) et (AB) soient parallèles.

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Soit les points : A(3 ; 2 ; -1), B(-4 ; 1 ; 3) et C(2 ; -1 ; 2).

Déterminer le point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

2° Soit les points E(2 ; 1 ; 3), F(-3 ; -4 ; 6), G(0 ; 4 ; 8) et H(-3, 3 ; 2).

Est-ce que EFGH est un parallélogramme ?

3° Soit $I = \text{mil}[EF]$, $J = \text{mil}[FG]$, $K = \text{mil}[GH]$ et $L = \text{mil}[HE]$.

- Calculer les coordonnées de I, J, K et L.
- Montrer que IJKL est un parallélogramme.
- Montrer que (IJ) et (EG) sont parallèles.

Exercice 16

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Soit $A(1; 2; -3)$, $B(-1; 3; 3)$ et $C(4; -1; 2)$.

Déterminer les coordonnées du point D afin que ABCD soit un parallélogramme.

- Soit $E(2; 3; 2)$, $F(-2; -1; 2)$ et $G(-2; 3; -2)$.

Déterminer la nature du triangle EFG (équilatéral, isocèle, rectangle...).

- Soit $H(3; 0; -1)$, $I(-2; 3; 2)$ et $J(1; 2; -2)$.

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\vec{IM} = \vec{HI} + 3\vec{HJ}$

- Dans chacun des cas suivants, dire si les points K, L et N sont alignés :

- $K(3; -1; 2)$, $L(0; 2; 4)$ et $N(2; 0; -3)$
- $K(-4; 1; 3)$, $L(-2; 0; 5)$ et $N(0; -1; 7)$

- Soit $P(2; -1; 5)$, $Q(0; -2; 3)$, $R(5; -2; -2)$ et $S(1; a; b)$.

Déterminer les réels a et b afin que (PQ) et (RS) soient parallèles.

- Trouver les réels a et b afin que $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Soit les points $A(-2; 3; 1)$ et $B(4; 2; 1)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

- Est-ce que B appartient à (d) ?

- Soit les points $C(4; -1; 2)$ et $D(2; 0; 3)$

- Déterminer un système d'équations paramétriques et cartésiennes de la droite (CD).

- Déterminer les réels a et b afin que le point $E(a; b; 1)$ appartienne à (CD).

- Soit les points $F(1; 2; -3)$ et $G(2; 1; 2)$

- Déterminer un système d'équations paramétriques et cartésiennes de la droite (FG).

- Existe-t-il un point H sur (FG) tel que son abscisse soit le triple de son ordonnée. Si oui, en donner les coordonnées.

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A(-1; 2; 1)$, $B(0; 3; -1)$ et $C(5; 2; -2)$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne

- du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v}
- du plan (ABC)

Corrigé de certains exercices**Exercice 10**

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD}$

$$2 \begin{pmatrix} -4-3 \\ 1-2 \\ 0-5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0-7 \\ -1-0 \\ -1+3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14-28 \\ -2-4 \\ -10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \vec{u} \begin{pmatrix} -42 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

$$\begin{pmatrix} 7-3 \\ 0-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+4 \\ -1-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\vec{w} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AD}$

$$-3 \begin{pmatrix} 7+4 \\ 0-1 \\ -3-0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0-3 \\ -1-2 \\ -1-5 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33-6 \\ 3-6 \\ 9-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \vec{w} \begin{pmatrix} -39 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E + 4 \\ y_E - 1 \\ z_E - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0-3 \\ -1-2 \\ -1-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 4 = -3 \\ y_E - 1 = -3 \\ z_E - 0 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -7 \\ y_E = -2 \\ z_E = -6 \end{cases} \quad \text{donc } E(-7; -2; -6)$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7-3 \\ 0-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} x_F - 0 \\ y_F + 1 \\ z_F + 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_F - 0 \\ y_F + 1 \\ z_F + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x_F = 0 \\ -2 + 2(y_F + 1) = 0 \\ -8 + 2(z_F + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x_F = 0 \\ -2 + 2y_F + 2 = 0 \\ -8 + 2z_F + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_F = -4 \\ 2y_F = 0 \\ 2z_F = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -2 \\ y_F = 0 \\ z_F = 3 \end{cases} \quad \text{donc } F(-2; 0; 3)$$

Exercice 12

a) \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -6k \\ -1 = -2k \\ 2 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.

b) \vec{u} et \vec{w} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2k \\ -1 = xk \\ 2 = yk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} & (1) \\ k = -\frac{1}{x} & (2) \text{ avec } x \neq 0 \\ k = \frac{2}{y} & (3) \text{ avec } y \neq 0 \end{cases}$

(1) dans (2) : $-\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

$$(1) \text{ dans (3) : } \frac{2}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$\text{donc } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$c) \overline{AB} \text{ et } \overline{CD} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overline{AB} = k\overline{CD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4-5 \\ 4-1 \\ 4+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2+1 \\ -1 \\ -3+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = 3k \\ 3 = -1k \\ 6 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ k = -3 \end{cases}$$

donc \overline{AB} et \overline{CD} sont colinéaires.

$$d) \overline{BC} \text{ et } \overline{ED} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overline{BC} = k\overline{ED} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+4 \\ 0-4 \\ -1-4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2-a \\ -1-b \\ -3-6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k(2-a) \\ -4 = k(-1-b) \\ -5 = -9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2-a} & (1) \text{ avec } a \neq 2 \\ k = \frac{-4}{-1-b} & (2) \text{ avec } b \neq -1 \\ k = \frac{5}{9} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ dans (1) : } \frac{3}{2-a} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 5(2-a) = 27 \Leftrightarrow 10 - 5a = 27 \Leftrightarrow 5a = -17 \Leftrightarrow a = -\frac{17}{5}$$

$$(3) \text{ dans (2) : } \frac{-4}{-1-b} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 5(-1-b) = -36 \Leftrightarrow -5 - 5b = -36 \Leftrightarrow 5b = 31 \Leftrightarrow b = \frac{31}{5}$$

donc $E(-\frac{17}{5}; \frac{31}{5}; 6)$

Exercice 13

$$a) AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

$$AC = \sqrt{(6-1)^2 + (-3-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$$

$$BC = \sqrt{(6-2)^2 + (-3+1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

donc $AB = BC$ et le triangle est isocèle de sommet principal B. Il n'est pas équilatéral.

$$b) DE = \sqrt{(3-1)^2 + (6-3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$EF = \sqrt{(0-3)^2 + (4-6)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$DF = \sqrt{(0-1)^2 + (4-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

on remarque que $EF^2 = DE^2 + DF^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en D.

Exercice 14

a) A, B et C sont alignés

$\Leftrightarrow \overline{AB}$ et \overline{AC} sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overline{AB} = k\overline{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+4 \\ -1-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2+4 \\ -3-1 \\ 4-2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 6k \\ -2 = -4k \\ 1 = 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc A, B et C sont alignés.

b) A, D et E sont alignés

$\Leftrightarrow \overline{AD}$ et \overline{AE} sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overline{AD} = k\overline{AE}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5+4 \\ 6-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4+4 \\ 0-1 \\ 4-2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 8k \\ 5 = -k \\ -1 = 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{8} \\ k = -5 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc A, D et E ne sont pas alignés.

c) (CD) et (EB) sont parallèles

$\Leftrightarrow \overline{CD}$ et \overline{EB} sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overline{CD} = k\overline{EB}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5-2 \\ 6+3 \\ 1-4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1-4 \\ -1-0 \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 = -5k \\ 9 = -k \\ -3 = -k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{5} \\ k = -9 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc (CD) et (EB) pas parallèles.

d) (AB) et (DE) sont parallèles

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{DE} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DE}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+4 \\ -1-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4+5 \\ 0-6 \\ 4-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=9k \\ -2=-6k \\ 1=3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ k=\frac{1}{3} \\ k=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc (AB) et (DE) sont parallèles.

e) (AB) et (FG) sont parallèles

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{DE} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{FG}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+4 \\ -1-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x+2 \\ 2-y \\ -3-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=k(x+2) \\ -2=k(2-y) \\ 1=-4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{x+2} & (1) \text{ avec } x \neq -2 \\ k=\frac{-2}{2-y} & (2) \text{ avec } y \neq 2 \\ k=-\frac{1}{4} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ dans } (1): \frac{3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x+2 = -12$$

$$\Leftrightarrow x = -14$$

$$(3) \text{ dans } (2): \frac{-2}{2-y} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2-y = 8$$

$$\Leftrightarrow y = -6$$

donc F(-2; -6; 1) et G(-14; 2; -3).

Exercice 15

$$1^\circ \text{ ABCD est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4-3 \\ 1-2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_D \\ -1-y_D \\ 2-z_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -7=2-x_D \\ -1=-1-y_D \\ 4=2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=9 \\ y_D=0 \\ z_D=-2 \end{cases}$$

donc D(9 ; 0 ; -2).

$$2^\circ \text{ EFGH est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3-2 \\ -4-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 4-3 \\ 8-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5=3 & \text{non!} \\ -5=1 & \text{non!} \\ 3=6 & \text{non!} \end{cases}$$

donc EFGH n'est pas un parallélogramme.

$$3^\circ \text{ a) } I\left(\frac{2-3}{2}; \frac{1-4}{2}; \frac{3+6}{2}\right) \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right), \quad J\left(\frac{-3+0}{2}; \frac{-4+4}{2}; \frac{6+8}{2}\right) \Rightarrow J\left(-\frac{3}{2}; 0; 7\right)$$

$$K\left(\frac{0-3}{2}; \frac{4+3}{2}; \frac{8+2}{2}\right) \Rightarrow K\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 5\right) \text{ et } L\left(\frac{-3+2}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{2+3}{2}\right) \Rightarrow L\left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{b) IJKL est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 + \frac{3}{2} \\ 7 - \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} - 2 \\ 5 - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 & \text{oui!} \\ \frac{3}{2} = \frac{3}{2} & \text{oui!} \\ \frac{5}{2} = \frac{5}{2} & \text{oui!} \end{cases} \quad \text{donc IJKL est un parallélogramme.}$$

c) (IJ) et (EG) sont parallèles

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}$ et \overrightarrow{EG} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EG}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-1 \\ 8-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2k \\ \frac{3}{2} = 3k \\ \frac{5}{2} = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc (IJ) et (EG) sont parallèles.

Exercice 16 (solutions finales)

a) D(6 ; -2 ; -4)

b) équilatéral

c) M(-13 ; 12 ; 2)

d) non / oui

e) a = -4 et b = $\frac{5}{2}$