

**1 Géométrie synthétique dans l'espace – Résultats** (figures pp. 217-221 et 517-521)

Tous les résultats de géométrie plane sont valables dans tout plan de l'espace.

**1.1 Détermination d'une droite, d'un plan**

- Une **droite** est déterminée par deux points distincts.
- Un **plan** est déterminé par
  - trois points non alignés.
  - deux droites sécantes.
  - deux droites parallèles distinctes.

**1.2 Position relative de deux droites**

- Deux droites distinctes peuvent être
  - **sécantes** (un seul point en commun et coplanaires)
  - **parallèles** (aucun point en commun et coplanaires)
  - **gauches** (aucun point en commun et pas coplanaires)
  - **perpendiculaires** (sécantes et formant un angle droit)
  - **orthogonales** (si la parallèle à l'une menée par un point de l'autre est perpendiculaire à celle-ci)
- Toute droite est parallèle à elle-même.

**1.3 Position relative de deux plans**

- Deux plans distincts peuvent être
  - **sécants** (une seule droite en commun)
  - **parallèles** (aucun point en commun)
  - **perpendiculaires** (l'un des deux contient une droite perpendiculaire à l'autre)
- Tout plan est parallèle à lui-même.

**1.4 Position relative d'une droite et d'un plan**

- Une droite et un plan ne contenant pas cette droite peuvent être
  - **sécants** (un seul point en commun)
  - **parallèles** (aucun point en commun)
  - **perpendiculaires** (la droite est orthogonale à toute droite du plan)
- Toute droite ayant deux points communs avec un plan, est entièrement incluse dans ce plan.
- Toute droite incluse dans un plan est parallèle à ce plan.

**1.5 Propriétés**

- Deux plans parallèles distincts sont coupés par un autre suivant deux droites parallèles.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- *critère de parallélisme d'une droite et d'un plan*  
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
- *critère de parallélisme de deux plans*  
Deux plans distincts sont parallèles si et seulement si l'un est parallèle à deux droites sécantes incluses dans l'autre.
- *critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan*  
Une droite et un plan sont perpendiculaires si et seulement si la droite est orthogonale ou perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.
- *critère d'orthogonalité de deux droites*  
Deux droites sont orthogonales si et seulement si l'une est incluse dans un plan perpendiculaire à l'autre.

## 2 Caractéristiques d'un vecteur

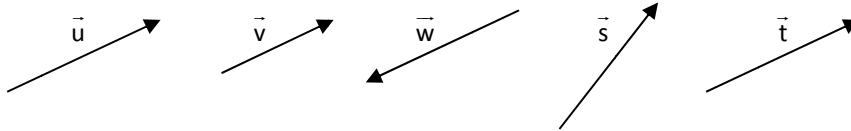
### Définition (caractéristiques d'un vecteur)

Un vecteur a trois caractéristiques :

- une direction,
- un sens,
- une longueur.

Deux vecteurs sont donc égaux, s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

### Exemples



	$\vec{u}$ et $\vec{v}$	$\vec{u}$ et $\vec{w}$	$\vec{u}$ et $\vec{s}$	$\vec{u}$ et $\vec{t}$
même direction				
même sens				
même longueur				
égaux				

## 3 Opérations sur les vecteurs

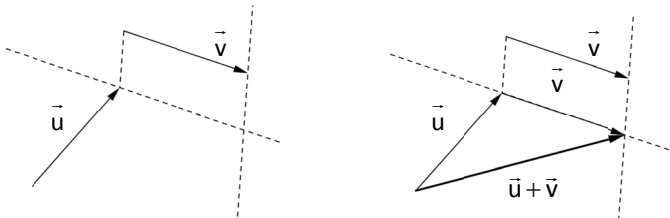
### 3.1 Addition

#### Méthode (addition de vecteurs)

Pour additionner des vecteurs, on les met bout à bout (origine – extrémité – origine – extrémité...).

Le vecteur résultant a l'origine du premier vecteur et l'extrémité du dernier vecteur de la somme.

#### Exemple



### 3.2 Soustraction

#### Méthode (soustraction de vecteurs)

Pour soustraire un vecteur d'un autre, on additionne son opposé.

(L'opposé d'un vecteur est un vecteur de même longueur, de même direction, mais de sens opposé.)

### 3.3 Multiplication d'un vecteur par un réel

#### Définition (multiplication d'un vecteur par un réel)

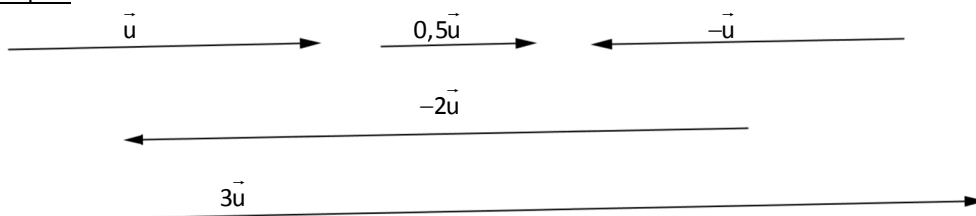
Le produit d'un vecteur par un réel positif  $k$  est un vecteur

- de même direction,
- de même sens,
- de longueur multipliée par  $k$ .

Le produit d'un vecteur par un réel négatif  $k$  est un vecteur

- de même direction,
- de sens opposé,
- de longueur multipliée par  $-k$ .

#### Exemples

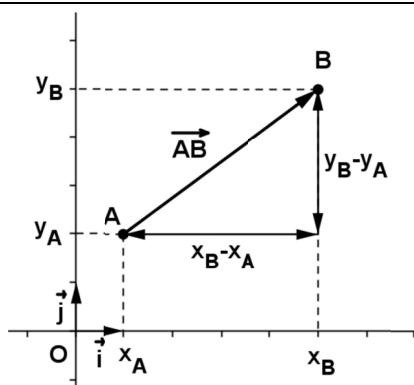


**4 Vecteurs et repères ; coordonnées d'un vecteur****4.1 Dans le plan****Définition** (coordonnées d'un vecteur dans le plan)Soit  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs de directions différentes. On appelle  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base de vecteurs du plan.Tout vecteur  $\vec{u}$  peut se décomposer de sorte que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .  $x$  et  $y$  sont alors les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ .On note :  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .**Remarques**

- La base est dite orthogonale si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux (angle de  $90^\circ$ ).
- La base est dite normée si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ont même longueur.
- La base est dite orthonormée si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux et ont même longueur.

**4.2 dans l'espace**

Par analogie avec ce qui précède, on définit les coordonnées d'un vecteur dans l'espace :

**Définition** (coordonnées d'un vecteur dans l'espace)Soit  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs de directions différentes. On appelle  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de vecteurs de l'espace.Tout vecteur  $\vec{u}$  peut se décomposer de sorte que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont alors les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ .On note :  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .**5 Vecteurs et points****Résultat** (coordonnées d'un vecteur dans le plan)Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .Alors on a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .**Résultat** (coordonnées d'un vecteur dans l'espace)Soit  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points du plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .Alors on a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ .**Exemple** $A(1; 2)$  et  $B(5; 5)$ alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 

**6 Propriétés sur les coordonnées des vecteurs****Résultats** (propriétés sur les coordonnées d'un vecteur)**dans le plan :**Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont égaux si et seulement si  $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ .Les coordonnées du vecteur  $k\vec{u}$  sont  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .Les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{u}'$  sont  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .**dans l'espace :**L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont égaux si et seulement si  $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$ .Les coordonnées du vecteur  $k\vec{u}$  sont  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ .Les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{u}'$  sont  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ .**Exemples**L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .a) Soit les points  $A(4 ; -1 ; 3)$ ,  $B(-3 ; 2 ; 0)$  et  $C(1 ; 2 ; -1)$ . Déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-4 \\ 2-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer les coordonnées de  $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

$$3 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21+6 \\ 9-6 \\ -9+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{u} \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer les coordonnées de D pour que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

$$\text{Soit } D(x_D ; y_D ; z_D). \text{ Alors } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 2 \\ z_D + 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = x_D - 1 \\ 3 = y_D - 2 \\ 3 = z_D + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 + 1 = x_D \\ 3 + 2 = y_D \\ 3 - 1 = z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -6 \\ y_D = 5 \\ z_D = -4 \end{cases} \quad \text{donc } D(-6 ; 5 ; -4).$$

**7 Milieu d'un segment****Propriété** (milieu d'un segment)

Soit A, B deux points du plan.

I est le milieu de [AB]  $\Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{IB}$ 

$$\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} = 2\vec{AI}.$$

**Résultat** (coordonnées du milieu d'un segment)**dans le plan :**Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .Alors les coordonnées du milieu I de [AB] sont :  $\left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ .**dans l'espace :**Soit  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points de l'espace muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .Alors les coordonnées du milieu I de [AB] sont :  $\left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$ .**Exemple**L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(-2; 4; 0)$  et  $C(3; 0; -2)$ .Soit  $A' = \text{mil}[BC]$ ,  $B' = \text{mil}[AC]$  et  $C' = \text{mil}[AB]$ .

$$\text{Alors : } A' \left( \frac{-2+3}{2}; \frac{4+0}{2}; \frac{0+(-2)}{2} \right) \Rightarrow A' \left( \frac{1}{2}; 2; -1 \right), \quad B' \left( \frac{1+3}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-3+(-2)}{2} \right) \Rightarrow B' \left( 2; 1; \frac{5}{2} \right)$$

$$\text{et } C' \left( \frac{1+(-2)}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{-3+0}{2} \right) \Rightarrow C' \left( -\frac{1}{2}; 3; -\frac{3}{2} \right)$$

**8 Vecteurs colinéaires****Définition** (vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, donc si l'un des deux est égal au produit de l'autre par un réel k.

Donc :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{v}$  $(\exists k \in \mathbb{R} : \text{il existe un réel } k)$ **Exemples**Soit les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$  et  $\vec{t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 5 \end{pmatrix}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$ )a) Est-ce que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ?

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2k \\ -2 = k \\ -6 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

donc  $\vec{u} = -2\vec{v}$  et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.b) Est-ce que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires ?

$$\vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -6k \\ -2 = 3k \\ -6 = -9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

c) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{t}$  soient colinéaires.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{t} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = ka \\ -2 = kb \\ -6 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{a} & (1) \\ k = \frac{-2}{b} & (2) \\ k = \frac{-6}{5} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ dans } (1) : \frac{4}{a} = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow -6a = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow a = \frac{20}{-6} = -\frac{10}{3}$$

$$(3) \text{ dans } (2) : \frac{-2}{b} = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow -6b = -2 \cdot 5 \Leftrightarrow b = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{donc } \vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

## 9 Norme d'un vecteur

**Résultats** (norme d'un vecteur)

**dans le plan :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

• Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan.

La longueur du vecteur  $\vec{u}$  appelée **norme** de  $\vec{u}$  et notée  $\|\vec{u}\|$  est calculée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

• Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan.

La longueur du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  appelée **norme** de  $\overrightarrow{AB}$  et notée  $\|\overrightarrow{AB}\|$  est calculée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**dans l'espace :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

• Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  un vecteur de l'espace.

La longueur du vecteur  $\vec{u}$  appelée **norme** de  $\vec{u}$  et notée  $\|\vec{u}\|$  est calculée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• Soit  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points de l'espace.

La longueur du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  appelée **norme** de  $\overrightarrow{AB}$  et notée  $\|\overrightarrow{AB}\|$  est calculée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Remarques :

• Au lieu de noter  $\|\overrightarrow{AB}\|$  (norme du vecteur), on peut aussi noter  $AB$  (distance de  $A$  à  $B$ ).

• Pour établir la formule  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$  dans le plan, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de la figure du paragraphe 5 page 3 :  $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Exemple

Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points  $A(5; 0; -2)$  et  $B(3; 2; 2)$ .

Calculer  $AB$ .

$$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Remarque : } \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

**10 Droites parallèles, points alignés****Propriété** (condition de parallélisme)

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

**Propriété** (condition d'alignement)

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

Remarque

Pour l'alignement de trois points, il suffit que deux vecteurs ayant comme extrémités ces trois points soient colinéaires.

Donc :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ou  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ou  $\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ou ...

Exemples

L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points A(5 ; 0 ; -2), B(3 ; 2 ; 2), C(1 ; 0 ; 1) et D(-2 ; 3 ; 7).

a) Est-ce que les points B, C et D sont alignés ?

B, C et D sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BD}$  sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BD}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-2 \\ 7-2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -5k \\ -2 = k \\ -1 = 5k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ k = -2 \\ k = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Donc B, C et D ne sont pas alignés.

b) Est-ce les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

(AB) et (CD) sont parallèles

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \\ 2+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-0 \\ 7-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -3k \\ 2 = 3k \\ 4 = 6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

c) Déterminer les réels a et b pour que A, B et E(a ; -3 ; b) soient alignés.

A, B et E sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$  sont colinéaires

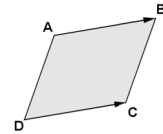
$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AE}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \\ 2+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a-5 \\ -3-0 \\ b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = k(a-5) \\ 2 = -3k \\ 4 = k(b+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-2}{a-5} & (1) \\ k = -\frac{2}{3} & (2) \\ k = \frac{4}{b+2} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \text{ dans } (1) : -\frac{2}{3} = \frac{-2}{a-5} \Leftrightarrow -2(a-5) = -6 \Leftrightarrow a-5 = 3 \Leftrightarrow a = 8$$

$$(2) \text{ dans } (3) : -\frac{2}{3} = \frac{4}{b+2} \Leftrightarrow -2(b+2) = 12 \Leftrightarrow b+2 = -6 \Leftrightarrow b = -8$$

donc E(8 ; -3 ; -8)

**11 Parallélogrammes****Propriété** (parallélogramme et vecteurs)ABCD est un parallélogramme si et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .(ou bien  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  ou  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$  ou ...)**Exemple**L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points  $I(5; 3; -1)$ ,  $J(-3; 5; 2)$  et  $K(2; 0; -1)$ .

Déterminer le point L pour que IJKL soit un parallélogramme.

(IJKL) est un parallélogramme

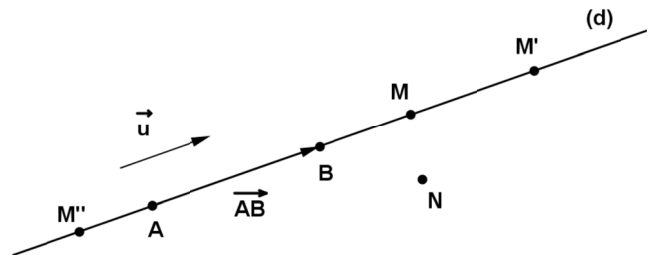
$$\Leftrightarrow \vec{IJ} = \vec{LK} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3-5 \\ 5-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_L \\ -y_L \\ -1-z_L \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 = 2-x_L \\ 2 = -y_L \\ 3 = -1-z_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 10 \\ y_L = -2 \\ z_L = -4 \end{cases}$$

donc  $L(10; -2; -4)$ **12 Équations de droites****12.1 Vecteur directeur**

Deux points distincts A et B définissent une droite (d).

La direction de cette droite est celle du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est appelé un **vecteur directeur** de la droite.Tout vecteur  $\vec{u}$  colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$  est aussi un vecteur directeur.

Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs

 $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires.**Exemple :**Sur la figure, M, M' et M'' appartiennent à la droite (d) :  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AM'}$ ,  $\overrightarrow{AM''}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires.Le point N n'appartient pas à la droite (d) :  $\overrightarrow{AN}$  et  $\overrightarrow{AB}$  ne sont pas colinéaires.**12.2 Équations paramétriques d'une droite****Exemple**Soit (d) la droite passant par  $A(1; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . $M(x; y) \in (d)$  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ 

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k \cdot 2 \\ y+1 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k+1 \\ y = k-1 \end{cases}$$

Le dernier système obtenu s'appelle un **système d'équations paramétriques** de la droite (d).

Dans ce système, le rôle du paramètre est joué par le réel k.

On peut donner n'importe quelle valeur à k : le point (x ; y) obtenu appartient toujours à la droite (d).

**Remarque**L'expression  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$  avec  $k \in \mathbb{R}$  est appelée une **équation vectorielle** de la droite (d)



Pour s'en convaincre :

$$k = 1 : \begin{cases} x = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow (3 ; 0)$$

$$k = 2 : \begin{cases} x = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ y = 2 - 1 = 1 \end{cases} \rightarrow (5 ; 1)$$

$$k = 3 : \begin{cases} x = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ y = 3 - 1 = 2 \end{cases} \rightarrow (7 ; 2)$$

$$k = 4 : \begin{cases} x = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \\ y = 4 - 1 = 3 \end{cases} \rightarrow (9 ; 3)$$

$$k = 0 : \begin{cases} x = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ y = 0 - 1 = -1 \end{cases} \rightarrow (1 ; -1)$$

$$k = 0,5 : \begin{cases} x = 2 \cdot 0,5 + 1 = 2 \\ y = 0,5 - 1 = -0,5 \end{cases} \rightarrow (2 ; -0,5)$$

$$k = 0,2 : \begin{cases} x = 2 \cdot 0,2 + 1 = 1,4 \\ y = 0,2 - 1 = -0,8 \end{cases} \rightarrow (1,4 ; -0,8)$$

$$k = -1 : \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \\ y = -1 - 1 = -2 \end{cases} \rightarrow (-1 ; -2)$$

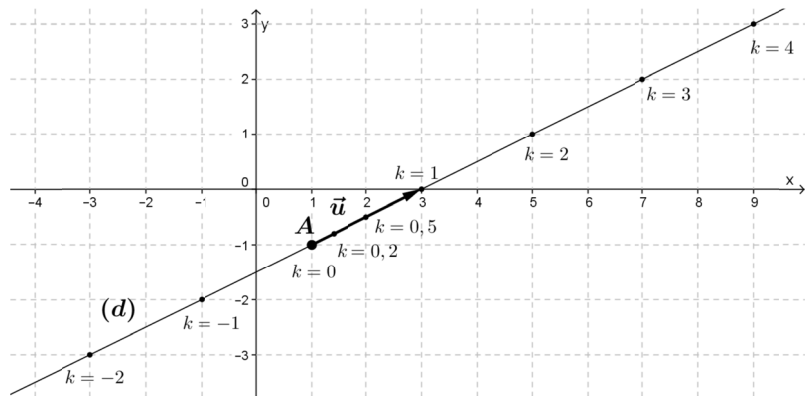
$$k = -2 : \begin{cases} x = 2 \cdot (-2) + 1 = -3 \\ y = -2 - 1 = -3 \end{cases} \rightarrow (-3 ; -3)$$

### Remarque

On retrouve les coordonnées de A et de  $\vec{u}$  dans le système d'équations :

$$(d) \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 1k - 1 \end{cases}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   $A(1 ; -1)$



### Cas général (équations paramétriques d'une droite dans l'espace)

On peut généraliser le résultat précédent à l'espace muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

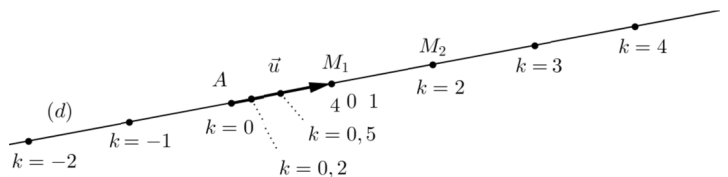
Soit (d) la droite passant par  $A(x_A ; y_A ; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ .

$M(x ; y ; z) \in (d)$

$\Leftrightarrow \vec{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{AM} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k\alpha \\ y - y_A = k\beta \\ z - z_A = k\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \end{cases}$$



### 12.3 Équations cartésiennes d'une droite

#### Exemple 1

Soit (d) la droite passant par  $A(1 ; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

D'après b) on a :  $(d) \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 & (1) \\ y = k - 1 & (2) \end{cases}$

$(2) : k = y + 1 \quad (2')$

$(2')$  dans  $(1) : x = 2(y + 1) + 1$

$\Leftrightarrow x = 2y + 2 + 1$

$\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$  donc  $(d) \equiv x - 2y - 3 = 0$

Cette dernière équation est **une équation cartésienne** de la droite (d). Elle ne contient pas de paramètre.

Exemple 2

Soit (e) la droite passant par B(2 ; -1 ; 4) et de vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$M(x ; y ; z) \in (e)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{BM} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-1) \\ z-4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = k \cdot (-1) \\ y+1 = k \cdot 3 \\ z-4 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k+2 & (1) \\ y = 3k-1 & (2) \\ z = k+4 & (3) \end{cases}$$

(3) :  $k = z - 4$  (3')

(3') dans (1) :  $x = -(z-4) + 2 \Leftrightarrow x + z - 6 = 0$

(3') dans (2) :  $y = 3(z-4) - 1 \Leftrightarrow y - 3z + 13 = 0$

Finalement :

$$(d) \equiv \begin{cases} x = -k+2 \\ y = 3k-1 \\ z = k+4 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad (d) \equiv \begin{cases} x + z - 6 = 0 \\ y - 3z + 13 = 0 \end{cases}$$

système de 3 équations paramétriques                      système de 2 équations cartésiennes

Ces deux systèmes représentent bien évidemment la même droite.

Remarque :

Si on ne connaît pas de vecteur directeur d'une droite, mais deux points de cette droite, alors le vecteur qui a pour extrémités ces deux points est un vecteur directeur de cette droite.

Ainsi p.ex.  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de la droite (AB).

**13 Équations de plans****13.1 Équations paramétriques d'un plan**

Un plan (P) a deux vecteurs directeurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Le plan (P) est alors l'ensemble des points M tels que :  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + h\vec{v}$  avec  $k, h \in \mathbb{R}$ .

Cette dernière expression est appelée l'**équation vectorielle** du plan (P).

Exemple

Soit (P) le plan passant par A(3 ; -1 ; 2) et de vecteurs directeurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$M(x ; y ; z) \in (P)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont coplanaires

$\Leftrightarrow (\exists k, h \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + h\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-(-1) \\ z-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = k \cdot 2 + h \cdot 4 \\ y+1 = k \cdot 1 + h \cdot (-1) \\ z-2 = k \cdot (-3) + h \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 4h + 3 \\ y = k - h - 1 \\ z = -3k + 2h + 2 \end{cases}$$

Le dernier système obtenu s'appelle un **système d'équations paramétriques** du plan (P).

Dans ce système, le rôle des paramètres est joué par les réels k et h.

**Cas général** (équations paramétriques d'un plan dans l'espace)

On peut généraliser le résultat précédent à l'espace muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

Soit (P) le plan passant par  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteurs directeurs non colinéaires  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ .

$M(x; y; z) \in (P)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont coplanaires

$\Leftrightarrow (\exists k, h \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + h\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k\alpha + h\alpha' \\ y - y_A = k\beta + h\beta' \\ z - z_A = k\gamma + h\gamma' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\alpha + h\alpha' + x_A \\ y = k\beta + h\beta' + y_A \\ z = k\gamma + h\gamma' + z_A \end{cases}$$

**13.2 Équation cartésienne d'un plan**Exemple

On reprend le plan (P) du paragraphe 13.1.

$$\text{Un système d'équations paramétriques est : } \begin{cases} x = 2k + 4h + 3 & (1) \\ y = k - h - 1 & (2) \\ z = -3k + 2h + 2 & (3) \end{cases}$$

On a :

$$(2) : k = y + h + 1 \quad (2')$$

$$\begin{aligned} (2') \text{ dans } (3) : z &= -3(y + h + 1) + 2h + 2 \\ &\Leftrightarrow z = -3y - 3h - 3 + 2h + 2 \\ &\Leftrightarrow h = -3y - z - 1 \quad (3') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3') \text{ dans } (2') : k &= y + (-3y - z - 1) + 1 \\ &\Leftrightarrow k = -2y - z \quad (2'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2'') \text{ et } (3') \text{ dans } (1) : x &= 2(-2y - z) + 4(-3y - z - 1) + 3 \\ &\Leftrightarrow x = -4y - 2z - 12y - 4z - 4 + 3 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x + 16y + 6z + 1 = 0} \end{aligned}$$

L'expression  $x + 16y + 6z + 1 = 0$  est une **équation cartésienne** du plan (P).

Montrons encore que le point  $A(3; -1; 2)$  est effectivement dans ce plan :

$$3 + 16 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 = 3 - 16 + 12 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Remarque :

Si on ne connaît pas de vecteurs directeurs d'un plan, mais trois points non alignés de ce plan, alors on construit les vecteurs directeurs à l'aide de ces trois points.

Ainsi p.ex.  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).