

- algèbre élémentaire (effectuer, factoriser, simplifier des fractions, résoudre des équations...)
- équations et inéquations du second degré
- schéma de Horner

1.1 Généralités

- domaine de définition d'une fonction : $\text{dom } f$
- ensemble des images d'une fonction : $\text{im } f$
- graphe cartésien d'une fonction : G_f
- fonction paire, impaire
- fonction constante, (strictement) croissante, (strictement) décroissante
- minimum, maximum d'une fonction

1.2 Fonctions homographiques

- graphe cartésien de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $f : x \mapsto m + \frac{n}{x+p}$, $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$
- asymptote horizontale, asymptote verticale

1.3 Comparaison de deux fonctions

- fonctions égales
- restriction d'une fonction, prolongement d'une fonction
- fonction (strictement) positive, (strictement) négative
- fonction f (strictement) inférieure, (strictement) supérieure à g
- fonction majorée, fonction minorée, fonction bornée
- majorant, minorant

1.4 Somme ou différence de deux fonctions

- fonction somme de f et g : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- fonction différence entre f et g : $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

1.5 Graphique

- graphe cartésien de $f(x) + k$, de $f(x) + g(x)$

1.6 Produit ou quotient de deux fonctions

- fonction produit de f et g : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- fonction quotient de f par g : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

1.7 Composée de deux fonctions

- fonction composée de f et g : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- décomposition de fonctions

Exercice d'introduction

Les coûts de production en € de q milliers de t-shirts sont modélisés par la fonction c définie par : $C(q) = 0,2q^3 - q^2 + 80q + 24000$ avec $q \in [0;60]$.

a) Combien coûte la production de 20000 t-shirts ?

b) Combien coûte la production d'un seul t-shirt si on en produit 20000.

2° Mêmes questions avec 40000 t-shirts.

3° Mêmes questions avec 60000 t-shirts.

4° Que remarque-t-on ?



Solutions finales de certains exercices (1)**Exercice 3**

1)	t en °C	10	20	40	60	80	100
	f(t) en %	20	40	100	50	20	6

- 2) À 40°C, la poudre a la plus grande efficacité.
 3) À 29°C et à 51°C, la poudre a une efficacité de 80 %.
 4) Sur l'intervalle [27 ; 53], l'efficacité est supérieure à 70 %.
 5) Sur le graphe on peut relever certaines informations du premier coup d'œil.
 6) La fonction est croissante sur [0 ; 40] et décroissante sur [40 ; 100].
 Elle admet un minimum en 0 et en 100 et un maximum en 40.

Exercice 6

	condition	dom f	ensemble des racines
1)	$4x^2 - 9x \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0; \frac{9}{4}\}$	\emptyset
2)	$7 - 3x \geq 0$	$] -\infty; \frac{7}{3}]$	$\{\frac{7}{3}\}$
3)	aucune	\mathbb{R}	$\{-5; 1\}$
4)	$x(x-3)(5-x) \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0; 3; 5\}$	\emptyset
5)	$(x+2)(x-3) \geq 0$	$] -\infty; -2] \cup [3; +\infty[$	\emptyset
6)	$x^2 - 4 > 0$	$] -\infty; -2[\cup]2; +\infty[$	\emptyset
7)	$x^2 - 4x + 4 \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	\emptyset
8)	aucune	\mathbb{R}	$\{1\}$
9)	$-9x^2 + 30x - 25 \geq 0$	$\{\frac{5}{3}\}$	$\{\frac{5}{3}\}$

Exercice 11

- a) 1) $S = \{-5, 7; 7\}$ 2) $S = \{6, 2; -5\}$ 3) $S = \{-7; -2; 3; 8\}$ 4) $S = \{-4; 7, 3\}$ 5) $S = \{-6, 4; 0; 7, 6\}$
 b) 1) $S = [-8; -5, 7[\cup]7; 8]$ 2) $S = [-8; -7, 5[\cup [-2, 7; 2]$ 3) $S =]-8; -6, 4[\cup]7, 6; 8[$ 4) $S = [-6, 4; 7, 6]$
 c) $f(x) < 1$ si $x \in]-6, 3; 7, 5[$
 $g(x) \geq 1$ si $x \in [-6, 5; -2, 6] \cup [3, 8; 7, 7]$ donc $S =]-6, 3; -2, 6] \cup [3, 8; 7, 5[$

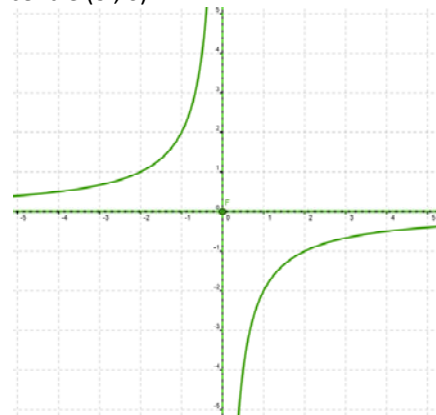
Rectificatif

exercice de la feuille « signe d'un polynôme »

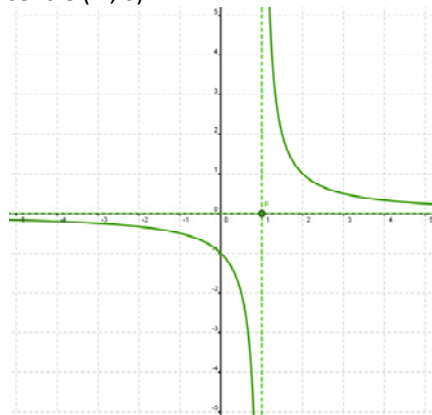
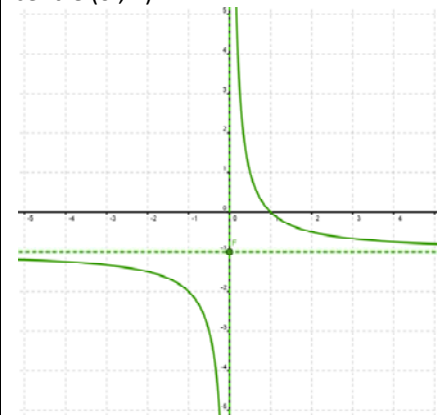
- m) $\text{dom } f =] \frac{1}{2}; +\infty[$ n) $\text{dom } f =] -\infty; 4] \cup] \frac{1}{2}; +\infty[$

Exercices 16 à 19

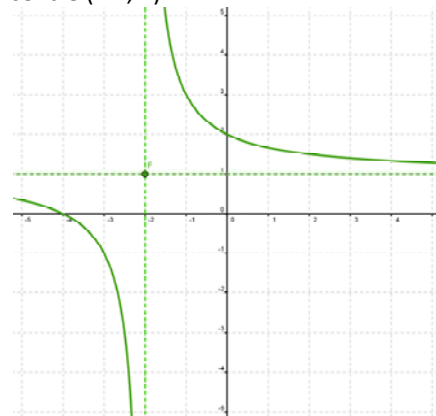
16-1) pas de racines

A.H. : $y = 0$; A.V. : $x = 0$
centre (0 ; 0)

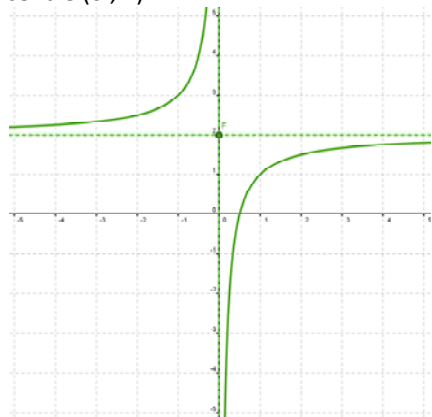
16-2) pas de racines

A.H. : $y = 0$; A.V. : $x = 1$
centre (1 ; 0)16-3) racine : $x = 1$ A.H. : $y = 1$; A.V. : $x = 0$
centre (0 ; 1)

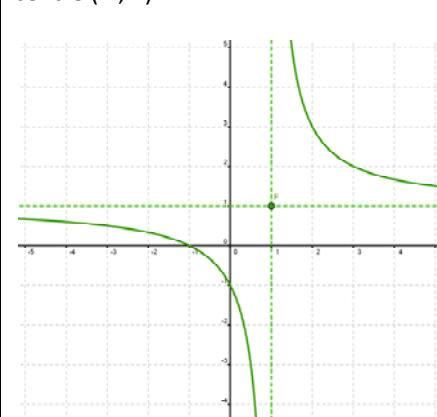
16-4) racine : -4

A.H. : $y = 1$; A.V. : $x = -2$
centre (-2 ; 1)19-1) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

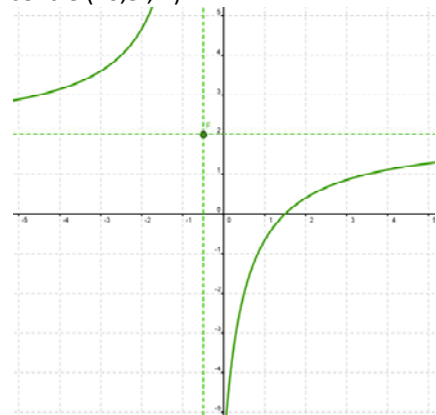
racine : 0,5

A.H. : $y = 2$; A.V. : $x = 0$
centre (0 ; 2)19-2) $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$

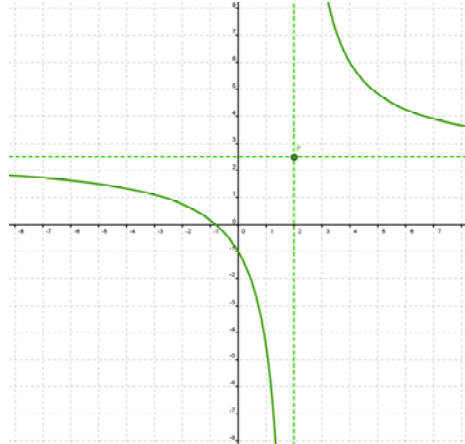
racine : -1

A.H. : $y = 1$; A.V. : $x = 1$
centre (1 ; 1)19-3) $f(x) = 2 - \frac{4}{x+0,5}$

racine : 1,5

A.H. : $y = 2$; A.V. : $x = -0,5$
centre (-0,5 ; 2)19-4) $f(x) = 2,5 + \frac{7}{x-2}$

racine : 0,5

A.H. : $y = 2,5$; A.V. : $x = 2$
centre (2 ; 2,5)

Exercice 17

1) C ; centre (0 ; 1)

A.H. : $y = 1$; A.V. : $x = 0$

2) B ; centre (2 ; -1)

A.H. : $y = -1$; A.V. : $x = 2$

3) D ; centre (-1 ; 0)

A.H. : $y = 0$; A.V. : $x = -1$

4) A ; centre (0 ; 2)

A.H. : $y = 2$; A.V. : $x = 0$

Exercice 18

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

b) $f(x) = 1 + \frac{-2}{x-1}$

c) $f(x) = 1 + \frac{1,5}{x}$

d) $f(x) = -1 + \frac{2}{x+1}$

Exercice 23

1) $f \neq g$, car $f(x) = |x| \neq g(x)$

2) $f \neq g$, car $\text{dom } f = \mathbb{R}$ et $\text{dom } g = [0; +\infty[$

3) $f = g$, car $\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{R}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = f(x)$

4) $f \neq g$, car $\text{dom } f = [\frac{3}{2}; +\infty[$ et $\text{dom } g = \mathbb{R}$

5) $f \neq g$, car $\text{dom } f =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$ et $\text{dom } g = [1; +\infty[$

6) $f \neq g$, car $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\text{dom } g = \mathbb{R}$

remarque : sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x-1} = \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = x-4 = g(x)$

7) $f \neq g$, car $\text{dom } f =]-\infty; -3[\cup [2; +\infty[$ et $\text{dom } g = [2; +\infty[$

8) $f = g$, car $\text{dom } f = \text{dom } g =]0; +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x-\sqrt{x}}{x} = g(x)$

9) $f \neq g$, car $\text{dom } f = [2; 3[\cup]3; +\infty[$ et $\text{dom } g = [2; +\infty[$

remarque : sur $[2; 3[\cup]3; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)} = \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{\sqrt{x-2}^2 - 1^2} = \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3} = \sqrt{x-2}+1 = g(x)$$

Exercice 26

a) $\text{dom } f = [-4; 4]$

b) 1) f est positive sur $[4; -1] \cup [2; 3]$

2) $f(x) < 0$ sur $] -1; 2[\cup]3; 4]$

3) $f(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2$ sur $[-4; 4]$

Exercice 28

a) $f < g$ sur $] -3; 1,5[$

b) $f(x) \geq g(x)$ sur $[-4; -3] \cup]1,5; 4]$

Exercice 30

1) f est minorée, majorée et donc aussi bornée (plus petit majorant : 3 ; plus grand minorant : -1)

2) f est majorée (plus petit majorant : 2)

3) f est minorée (plus grand minorant : -2)

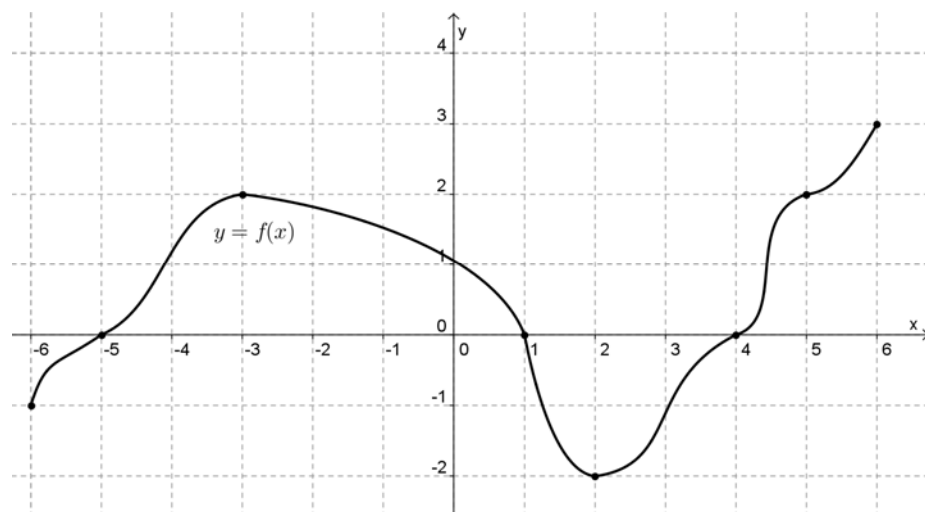
4) f est minorée, majorée et donc aussi bornée (plus petit majorant : 1 ; plus grand minorant : -1)

5) f est minorée (plus grand minorant : -4)

6) f est majorée (plus petit majorant : 0)

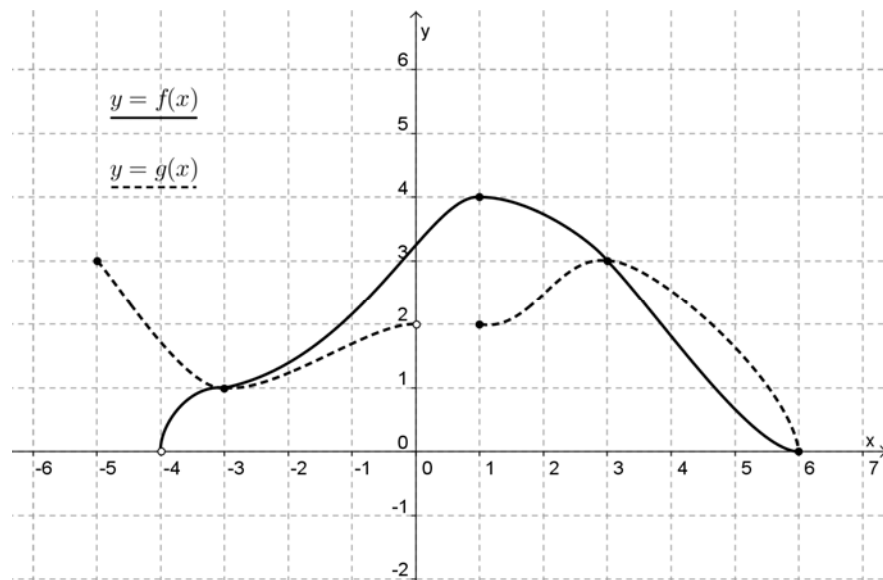
Quelques exercices supplémentaires... en cas de besoin

Exercice A

Voici le graphe cartésien d'une fonction f :

- Déterminer dom f et im f .
- Quelle est la valeur de $f(5)$?
- Que vaut l'image de -3 ?
- Quelles sont les racines de f ?
- Résoudre l'équation $f(x) = -2$.
- Résoudre l'inéquation $f(x) < 2$.
- Résoudre l'équation $f(x) - 3 = 0$.
- Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle croissante?
- Sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est-elle positive?
- La fonction f est-elle minorée? majorée? bornée?

Exercice B

Voici les graphes cartésiens de deux fonctions f et g :

- Déterminer dom f , im f , dom g et im g .
- Quelles sont les racines de f ?
- Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
- Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

Exercice C

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 4x + 3} - \frac{3}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{5x+4}{2x+8}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} + \frac{x-1}{x+3}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{-2x+7}}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{5x+4}}{\sqrt{2x+8}}$

f) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x-4} - \sqrt{5-2x}$

Exercice D

Est-ce que dans les cas suivants, $f = g$?

a) $f(x) = x + 3$ et $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{x + 3\sqrt{x}}{x}$

c) $f(x) = |x + 5|$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$

Exercice E

Tracer le graphe des fonctions suivantes, puis indiquer l'équation de chaque asymptote et les racines éventuelles :

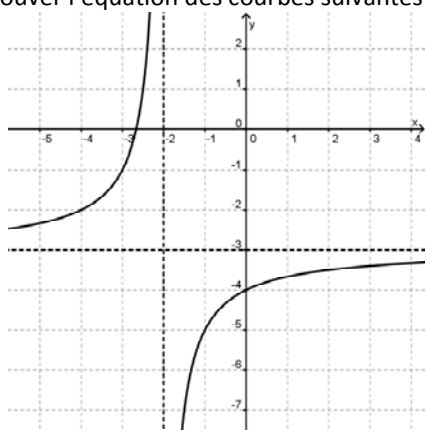
a) $f(x) = 2 + \frac{2}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{-1}{x+1} - 3$

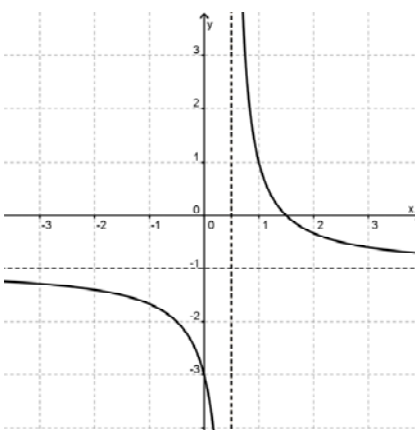
c) $f(x) = \frac{2x+4}{2x-6}$

Exercice F

Trouver l'équation des courbes suivantes :



a)



b)

Exercice G

Soit les fonctions suivantes : $f(x) = x^2 + 2x$ $g(x) = \frac{2x}{x+3}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer dom f , dom g et dom h .

2) Déterminer le domaine de définition et l'expression analytique des fonctions suivantes :

a) $f \circ g$

b) $h \circ f$

c) $h \circ g$

d) $h \circ g \circ f$

e) $\frac{f}{g}$

Exercice H

Décomposer les fonctions suivantes en composée de fonctions usuelles* :

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 8}$

b) $f(x) = (3\sqrt{x} + 8)^2$

c) $f(x) = \frac{4}{x+2} + 5$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3|x|-1}}$

*fonctions usuelles : $x \mapsto ax + b$ $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto |x|$

Solutions finales de certains exercices (2)**Exercice 39**

$$e) 1) \text{ dom } (f \circ h \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; (f \circ h \circ g)(x) = \left(\frac{-2}{x-1}\right)^2 = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$$

$$2) \text{ dom } (g \circ f \circ h) = \mathbb{R}^*; (g \circ f \circ h)(x) = \left(\frac{-2}{x}\right)^2 - 1 = \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2}$$

$$3) \text{ dom } (g \circ h \circ f) = \mathbb{R}^*; (g \circ h \circ f)(x) = \frac{-2}{x^2} - 1 = \frac{-2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = \frac{-2 - x^2}{x^2}$$

$$4) \text{ dom } (h \circ f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; (h \circ f \circ g)(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

Exercice 41

$$1) f(x) = (h \circ g)(x) \text{ avec } g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = 1 - x$$

$$2) f(x) = (h \circ g)(x) \text{ avec } g(x) = 1 - x \text{ et } h(x) = x^2$$

$$3) f(x) = (h \circ g)(x) \text{ avec } g(x) = 2 - x \text{ et } h(x) = \sqrt{x}$$

$$4) f(x) = (i \circ h \circ g)(x) \text{ avec } g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = 4 - x \text{ et } i(x) = \sqrt{x}$$

$$5) f(x) = (k \circ j \circ i \circ h \circ g)(x) \text{ avec } g(x) = x - 1 \text{ et } h(x) = x^2 \text{ et } i(x) = \sqrt{x} \text{ et } j(x) = \frac{1}{x} \text{ et } k(x) = -x$$

Encore quelques exercices supplémentaires...**Exercice I**

Soit $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = -2x + m$

Déterminer m pour que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice J

Soit les trois fonctions définies par : $g(x) = x + 2$ et $h(x) = x^2$ et $i(x) = \frac{1}{x}$

Décomposer les fonctions suivantes en utilisant g , h et i :

$$a) f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$d) f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)^2$$

Exercice K

Décomposer les fonctions suivantes en composée de fonctions usuelles* :

$$a) f(x) = \sqrt{2|x| + 1}$$

$$b) f(x) = (-4\sqrt{x} + 3)^2$$

$$c) f(x) = \frac{6}{2x + 7} - 1$$

$$d) f(x) = \frac{-2}{\sqrt{-(2x+1)^2 - 1}} + 5$$

*fonctions usuelles : $x \mapsto ax + b$ $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto |x|$