

- polynômes : racines, factorisation

3.1 Limite en un réel – Introduction

- quand calculer la limite d'une fonction ?
- présentation intuitive : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

3.2 Limite en un réel – Théorie – Calcul

- définition : « x tend vers a »
- définitions : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- limite en un réel de fonctions usuelles
- opérations algébriques sur les limites
- limite de fonctions composées
- prolongement de fonctions
- limite à gauche, limite à droite
- limite en 0 de la fonction inverse : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- limite au réel a d'une fonction telle que $f(a) = 0$
- cas d'indétermination : « $\infty - \infty$ », « $0 \cdot \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ »

3.3 Limite en l'infini – Introduction

- présentation intuitive : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3.4 Limite en l'infini – Théorie – Calcul

- définitions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- limite à l'infini de fonctions usuelles
- opérations algébriques sur les limites
- limite en l'infini d'une fonction polynôme
- limite en l'infini d'une fonction rationnelle

3.5 Asymptotes

- asymptote verticale ($x = a$) : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$
- asymptotes horizontales ($y = a$) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$
- asymptote oblique ($y = ax + b$) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Synthèse sur le calcul de limites

Existence d'une limite en un point a

	f définie à droite de a (en a^+)	f pas définie à droite de a (en a^+)
f définie à gauche de a (en a^-)	<ul style="list-style-type: none"> • si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égal à cette limite • si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas 	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égal à $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
f pas définie à gauche de a (en a^-)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égal à $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	<ul style="list-style-type: none"> • si f est définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ • si f n'est pas définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas

Calcul d'une limite en un point a

- si f est définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

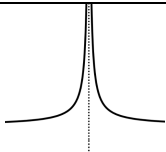
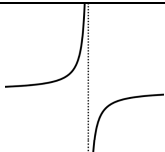
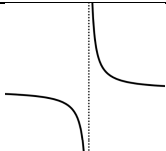
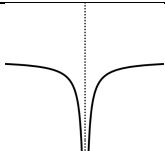
- si f n'est pas définie en a

MÉTHODE: on remplace x par a

- si on obtient « $\frac{n}{0}$ » ($n \neq 0$) \rightarrow on calcule les limites à gauche et à droite de a

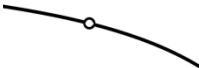
MÉTHODE: on détermine le signe du dénominateur pour voir si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^- .

INTERPRÉTATION: le graphe de f admet **une asymptote verticale d'équation $x = a$**

	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas	 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- si on obtient « $\frac{0}{0}$ »

MÉTHODE: - on factorise numérateur et dénominateur
- on simplifie par $(x - a)$
- on remplace x par a

si on obtient « $\frac{n}{m}$ »	si on obtient « $\frac{n}{0}$ » ou « $\frac{0}{0}$ »
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{n}{m}$  INTERPRÉTATION: le graphe de f a un « trou » au point a.	cf. plus haut

Calcul d'une limite en l'infini

Remarque : dans ce qui suit « ∞ » signifie soit « $-\infty$ », soit « $+\infty$ ».

- si f est une fonction polynôme

MÉTHODE: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\text{terme de plus haut degré}) \rightarrow \text{on trouve: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- si f est une fonction rationnelle

MÉTHODE: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{terme de plus haut degré du numérateur}}{\text{terme de plus haut degré du dénominateur}}$

- on simplifie \rightarrow 3 cas sont alors possibles

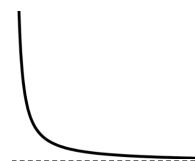
- si $\text{degré}(\text{numérateur}) > \text{degré}(\text{dénominateur}) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

INTERPRÉTATION: le graphe de f admet **éventuellement une asymptote oblique** (cf. plus loin)



- si $\text{degré}(\text{numérateur}) = \text{degré}(\text{dénominateur}) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = n \quad (n \neq 0)$

INTERPRÉTATION: le graphe de f admet **une asymptote horizontale d'équation $y = n$**



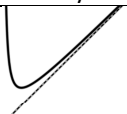
- si $\text{degré}(\text{numérateur}) < \text{degré}(\text{dénominateur}) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

INTERPRÉTATION: le graphe de f admet **une asymptote horizontale d'équation $y = 0$**

Détermination de l'équation d'une asymptote oblique

condition : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

MÉTHODE: on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \rightarrow \text{on calcule } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$		si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$	si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$		
le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$	le graphe de f n'admet pas d'asymptote oblique		
	le graphe de f admet une branche parabolique de direction $y = ax$	le graphe de f admet une branche parabolique de direction (Oy)	le graphe de f admet une branche parabolique de direction (Ox)