

2G - DÉRIVÉES

0 Exemples introductifs

vitesse instantanée (feuille), pentes et tangentes (projecteur)

1 Définitions

1.1 Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur $\text{dom } f$ et x un point de $\text{dom } f$.

Le nombre dérivé de f au point x est égal à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si cette limite existe.

On dit alors que f est dérivable en x .

Ce nombre est appelé $f'(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Déterminer le nombre dérivé de f au point 1.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \quad \text{forme indéterminée "0/0", il faut factoriser} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \end{aligned}$$

Donc $f'(1) = 2$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Déterminer le nombre dérivé de f au point 2.

1.2 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur $\text{dom } f$.

$\text{dom } f'$ est appelé ensemble de dérivation, c.-à-d. l'ensemble des valeurs x pour lesquelles le nombre dérivé existe.

On appelle fonction dérivée de f la fonction f' , qui à tout point x de $\text{dom } f$, associe le nombre dérivé de f en ce point.

Exemples

* Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Déterminer la fonction dérivée de f .

$$\begin{aligned} (\forall x \in \text{dom } f') : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \quad \text{forme indéterminée "0/0", il faut factoriser} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 2x$.

★ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Déterminer la fonction dérivée de f .

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in D_{f'}) : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \quad \text{forme indéterminée "0/0", il faut factoriser} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2
 \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 3x^2$.

Exercice 2

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = ax + b$

(en déduire la fonction dérivée de la fonction définie par $f(x) = x$ et d'une fonction constante)

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

2 Formules de dérivation

2.1 Dérivée de x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$

On a vu que:

si $f(x) = x$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 1 \quad (= 1x^0)$

si $f(x) = x^2$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2x \quad (= 2x^1)$

si $f(x) = x^3$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 3x^2$

en général: $\text{si } f(x) = x^n, \text{ alors } (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = nx^{n-1}$

2.2 Dérivée de x^n pour des valeurs de n non naturelles (non nulles)

La formule pour les valeurs naturelles de n reste vraie. On admet donc que:

si $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

si $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

si $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.3 Dérivée d'une somme de fonctions

Soit f , u et v trois fonctions définies sur D_f et dérivables sur $D_{f'}$.

On admet que:

si $f(x) = u(x) + v(x)$, alors $(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = u'(x) + v'(x)$

en bref: $(u+v)' = u' + v'$

Exemple

$$f(x) = \underbrace{x^2}_u + \underbrace{x}_v$$

$\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbb{R}$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \underbrace{2x}_{u'} + \underbrace{1}_{v'}$$

2.4 Dérivée du produit d'une fonction par un réel

Soit f et u deux fonctions définies sur D_f et dérivables sur D_f .

Soit k un réel.

On admet que:

si $f(x) = k \cdot u(x)$, alors $(\forall x \in D_f) : f'(x) = k \cdot u'(x)$

en bref: $(ku)' = ku'$

Exemples

$$\star f(x) = \underbrace{4}_k \cdot \underbrace{x^2}_u$$

$$\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbb{R}$$

$$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \underbrace{4}_k \cdot \underbrace{2x}_{u'} = 8x$$

$$\star f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

$$\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbb{R}$$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 6x - 5$$

Exercice 3

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = 7x^2 + 5x - 9$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 4$

2.5 Dérivée du produit de deux fonctions

Expérience

On a vu que $(u + v)' = u' + v'$. Mais alors: est-ce que $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$?

Soit $f(x) = x^5$. On sait que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 5x^4$.

$$\text{On a aussi } f(x) = x^5 = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{x^3}_{v(x)}.$$

Or, si $u(x) = x^2$, alors $u'(x) = 2x$ et si $v(x) = x^3$, alors $v'(x) = 3x^2$.

Donc $u'(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \neq f'(x)$.

Ainsi: $(u \cdot v)' \neq u' \cdot v'$

Résultat

Soit f, u et v des fonctions définies sur D_f et dérivables sur D_f .

On admet que:

si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, alors $(\forall x \in D_f) : f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

en bref: $(uv)' = u'v + uv'$

Reprenons l'exemple de l'expérience:

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4 \stackrel{!}{=} f'(x)$$

Exemple

$$\star f(x) = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_v$$

$$\text{dom } f = [0; +\infty[\text{ et } \text{dom } f' =]0; +\infty[$$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_v + \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

ou bien:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

Exercice 4

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = (3x + 2) \cdot x^4$

b) $f(x) = 5x^3 \cdot (x^2 + 5)$

c) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{x}$

2.6 Dérivée du quotient de deux fonctions

Soit f , u et v des fonctions définies sur D_f et dérivables sur $D_{f'}$ et telles que $v(x) \neq 0$.

On admet que:

$$\text{si } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ alors } (\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

en bref: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples

★ $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

condition: $x^2 + 1 \neq 0$ toujours vrai!

dom $f = \text{dom } f' = \mathbb{R}$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \frac{\overbrace{2}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2 + 1)}^v - \overbrace{2x}^u \cdot \overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{(x^2 + 1)^2}_{v^2}} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

★ $f(x) = \frac{4x + 5}{3x - 1}$

condition: $3x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$

dom $f = \text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \frac{\overbrace{4}^{u'} \cdot \overbrace{(3x - 1)}^v - \overbrace{(4x + 5)}^u \cdot \overbrace{3}^{v'}}{\underbrace{(3x - 1)^2}_{v^2}} = \frac{12x - 4 - 12x - 15}{(3x - 1)^2} = \frac{-19}{(3x - 1)^2}$$

★ $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

condition: $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5+3}{2} = 4$ et $x \neq \frac{5-3}{2} = 1$

dom $f = \text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) &= \frac{\overbrace{(2x + 2)}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2 - 5x + 4)}^v - \overbrace{(x^2 + 2x + 3)}^u \cdot \overbrace{(2x - 5)}^{v'}}{\underbrace{(x^2 - 5x + 4)^2}_{v^2}} \\ &= \frac{(2x^3 - 10x^2 + 8x + 2x^2 - 10x + 8) - (2x^3 + 4x^2 + 6x - 5x^2 - 10x - 15)}{(x^2 - 5x + 4)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x + 2x^2 - 10x + 8 - 2x^3 - 4x^2 - 6x + 5x^2 + 10x + 15}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{-7x^2 + 2x + 23}{(x^2 - 5x + 4)^2} \end{aligned}$$

Cas particulier: si $u(x) = k$ (constante)

$f(x) = \frac{k}{v(x)}$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \frac{0 \cdot v(x) - k \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-k \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

en bref: $\left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-kv'}{v^2}$

Exemple

$$\star f(x) = \frac{4}{x^2 - 9}$$

condition: $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ et } x \neq -3$.

$$\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \frac{\overbrace{-4 \cdot 2x}^{v'}}{\underbrace{(x^2 - 9)^2}_{v^2}} = \frac{-8x}{(x^2 - 9)^2}$$

Exercice 5

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$$\text{a) } f(x) = \frac{7}{4x + 1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2 - 3x}{5x + 1}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 2x + 2}$$

2.7 Dérivée d'une puissance d'une fonction

Remarque

Au lieu de noter $(u(x))^n$, on écrit $u^n(x)$.

Expérience

On a vu que si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Mais alors: si $f(x) = u^n(x)$, est-ce qu'alors $f'(x) = nu^{n-1}(x)$?

$$\star f(x) = (3x + 1)^2 \quad \text{Est-ce que } f'(x) = 2(3x + 1) ?$$

$$\text{On a } f(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 18x + 6 = 6(3x + 1) \neq 2(3x + 1)$$

$$\star f(x) = (-5x + 4)^2 \quad \text{Est-ce que } f'(x) = 2(-5x + 4) ?$$

$$\text{On a } f(x) = (-5x + 4)^2 = 25x^2 - 40x + 16$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 50x - 40 = -10(-5x + 4) \neq 2(-5x + 4)$$

$$\star f(x) = (3x^3 + 4)^2 \quad \text{Est-ce que } f'(x) = 2(3x^3 + 4) ?$$

$$\text{On a } f(x) = (3x^3 + 4)^2 = 9x^6 + 24x^3 + 16$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 54x^5 + 72x^2 = 18x^2(3x^3 + 4) \neq 2(3x^3 + 4).$$

Ainsi: si $f(x) = u^n(x)$, alors $f'(x) \neq nu^{n-1}(x)$.

Résultat

Soit f et u des fonctions définies sur D_f et dérivables sur $D_{f'}$.

On admet que:

$$\text{si } f(x) = u^n(x), \text{ alors } (\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = nu^{n-1}(x) \cdot u'(x)$$

$$\text{en bref: } \boxed{(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'}$$

Exemples

$$\star f(x) = (3x + 1)^2$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2(3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1)$$

$$\star f(x) = (-5x + 4)^2$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2(-5x + 4) \cdot (-5) = -10(-5x + 4)$$

$$\star f(x) = (3x^3 + 4)^2$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2(3x^3 + 4) \cdot 9x^2 = 18x^2(3x^3 + 4)$$

$$\star f(x) = \overbrace{(x^3 + 4x^2)^5}^{u^5}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \underbrace{5(x^3 + 4x^2)^4}_{5u^4} \underbrace{(3x^2 + 8x)}_{u'} = 5x(3x + 8)(x^3 + 4x^2)^4$$

Exercice 6

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes:

a) $f(x) = (5x^2 + 9)^4$

b) $f(x) = (12x^3 - 5x)^6$

c) $f(x) = (2x + \sqrt{x})^3$

2.8 Dérivée de la racine carrée d'une fonction

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple

$$\star f(x) = \sqrt{5 - 3x}$$

$$\text{condition: } 5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$$

$$D_f =]-\infty; \frac{5}{3}]; D_{f'} =]-\infty; \frac{5}{3}[$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{\overbrace{-3}^{u'}}{\underbrace{2\sqrt{5-3x}}_{2\sqrt{u}}}$$

Remarque

Ici, $\text{dom } f \neq \text{dom } f'$ à cause de la racine carrée qui passe au dénominateur lors de la dérivation.

Les fonctions faisant intervenir des racines carrées sont d'ailleurs les seules (vues cette année) dont le domaine de dérivation diffère du domaine de définition.

Exercice 7

Déterminer $\text{dom } f$, $\text{dom } f'$ et la fonction dérivée f' des fonctions suivantes:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

k) $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{1-4x}$

b) $f(x) = (5x+3)^3$

g) $f(x) = (x + \sqrt{x})^4$

l) $f(x) = (4x+1)^2(2-3x)^3$

c) $f(x) = 2x^2 + x - 7$

h) $f(x) = \frac{3}{(2x+1)^4}$

m) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}}$

d) $f(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$

i) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2-4}$

n) $f(x) = \frac{4x+1}{2x^2+5x-3}$

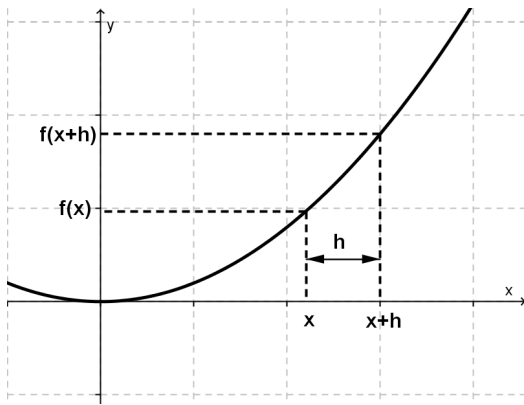
e) $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{x}$

j) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x+1}$

o) $f(x) = x + \frac{2x}{x} - \frac{2}{9x^2}$

3 Utilisation de la dérivation

3.1 Observation



si f est croissante:

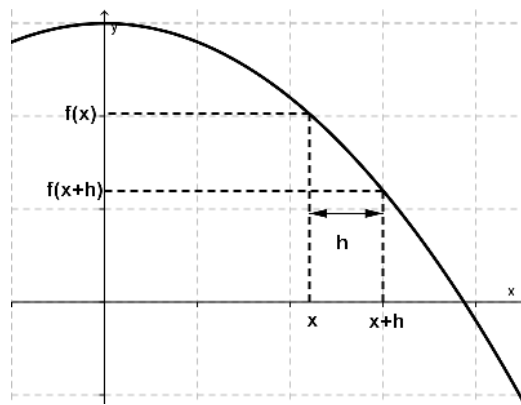
$$f(x+h) > f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) - f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0$$



si f est décroissante

$$f(x+h) < f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) - f(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) < 0$$

3.2 Variations: résultats théoriques

a) Variations

Soit f une fonction définie sur $\text{dom } f$. Soit f' sa fonction dérivée définie sur $\text{dom } f$.

Soit I un intervalle appartenant à $\text{dom } f$.

Si f' est positive sur I , alors la fonction f est croissante sur I .

Si f' est négative sur I , alors la fonction f est décroissante sur I .

b) Extréma

Soit f une fonction définie sur $\text{dom } f$. Soit f' sa fonction dérivée définie sur $\text{dom } f$.

Soit I un intervalle appartenant à $\text{dom } f$ et a un réel de I .

Si f' s'annule et change de signe en a , alors la fonction f admet un extrémum en a .

- si la dérivée est d'abord positive, ensuite nulle et puis négative, on a un maximum.

- si la dérivée est d'abord négative, ensuite nulle et puis positive, on a un minimum.

c) Tableau des variations

On résume tous les résultats dans un tableau des variations:

ligne 1: $x \rightarrow$ bornes du domaine et valeurs pour lesquelles la dérivée est nulle

ligne 2: $f' \rightarrow$ signe de la dérivée (+ ou -), les zéros (0) et les points non définis (||)

ligne 3: $f \rightarrow$ croissance de la fonction (\nearrow ou \searrow), limites et points non définis (||)

3.3 Exemples

a) Exemple 1

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

domaine de définition

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$$

domaine de dérivation et dérivée

$$\text{dom } f' = \mathbb{R}$$

$$(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = -6x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

signe de la dérivée:

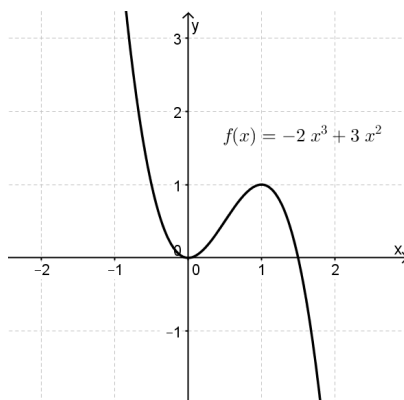
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$-6x^2 + 6x$	-	0	+	0	-

tableau des variations

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
f'	-	0	+	0	-		
f	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	1	\searrow	$-\infty$

$$f(0) = 0; f(1) = -2 + 3 = 1$$

Représentation graphique →



b) Exemple 2

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2}$$

domaine de définition

$$\text{condition: } x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1+3}{2} = 2 \text{ et } x \neq \frac{1-3}{2} = -1$$

$$\text{donc dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$$

limites aux bornes du domaine

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \\ \text{de même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \end{array} \right\} \text{A.H.: } y = -1$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2} \quad \text{il faut distinguer } -1^+ \text{ et } -1^-$$

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2} = -\infty \quad \text{A.V.: } x = -1$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2} \quad \text{il faut distinguer } 2^+ \text{ et } 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2} = +\infty \quad \text{A.V.: } x = 2$$

domaine de dérivation et dérivée

$$\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \text{dom } f) : f'(x) &= \frac{(-2x+1) \cdot (x^2-x-2) - (-x^2+x+4) \cdot (2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{-2x^3+2x^2+4x+x^2-x-2 - (-2x^3+x^2+2x^2-x+8x-4)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{-2x^3+3x^2+3x-2+2x^3-3x^2-7x+4}{(x^2-3x)^2} = \frac{-4x+2}{(x^2-3x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

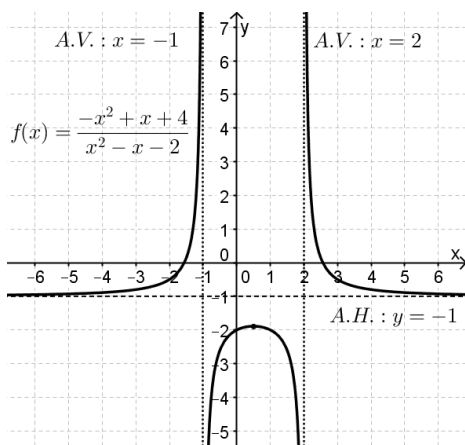
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-4x+2$		+	0 -

tableau des variations

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$								
f'		+		+	0	-		-					
f	-1	\nearrow	$+\infty$		$-\infty$	\nearrow	$-\frac{17}{9}$	\searrow	$-\infty$		$+\infty$	\searrow	-1

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{-9}{4}} = -\frac{17}{9} \simeq -1,9$$

représentation graphique



Exercice 8

Dresser le tableau des variations complet (avec limites) des fonctions définies par:

a) $f(x) = -2x + 1$

e) $f(x) = x^4 - 32x^2$

i) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

f) $f(x) = 5x^6 - 6x^5 - 15x^4$

j) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

g) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

k) $f(x) = \frac{2x^2-10x+18}{x-5}$

d) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 15$

h) $f(x) = \frac{3x+1}{4x-3}$

l) $f(x) = \frac{-x^2+x+4}{x^2-x-2}$

3.4 Tangente à la courbe en un point

La pente de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est $f'(a)$.

L'équation de cette tangente est: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 1 et 3.

$$(\forall x \in \text{dom}f') : f'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3x^2 - \frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

tangente au point d'abscisse 1:

$$f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$f(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^3 - \frac{3}{4} \cdot 1^2 = \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{7}{12}$$

équation:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow y = -(x - 1) - \frac{7}{12}$$

$$\Leftrightarrow y = -x + \frac{5}{12}$$

tangente au point d'abscisse 3:

$$f'(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

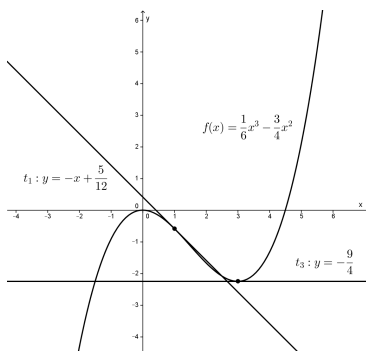
$$f(3) = \frac{1}{6} \cdot 3^3 - \frac{3}{4} \cdot 3^2 = \frac{36}{12} - \frac{81}{12} = -\frac{27}{12} = -\frac{9}{4}$$

équation:

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

$$\Leftrightarrow y = -0 \cdot (x - 3) - \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{9}{4} \quad (\text{tangente parallèle à } (Ox))$$



3.5 Intersection de la courbe avec les axes

a) Intersection avec l'axe des abscisses: $C_f \cap (Ox)$

Il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour trouver les abscisses de ces points. Il peut y avoir plusieurs points.

b) Intersection avec l'axe des ordonnées: $C_f \cap (Oy)$

C'est le point de coordonnées $(0, f(0))$ si f est définie en 0. Il ne peut y avoir qu'un seul point.

Exemple:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x^2 + 3x + 10} \quad (D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\})$$

intersection avec l'axe des abscisses:

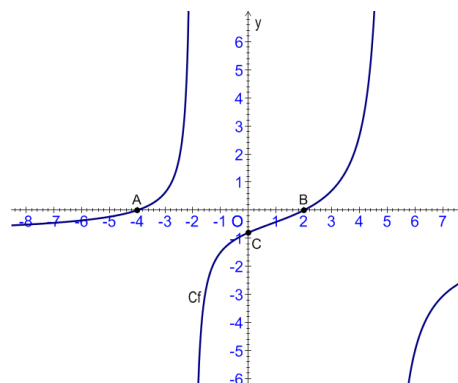
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 36 \quad x = -4 \text{ ou } x = 2$$

$$C_f \cap (Ox): A(-4; 0) \text{ et } B(2; 0)$$

intersection avec l'axe des ordonnées:

$$f(0) = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} = -0,8$$

$$C_f \cap (Oy): C(0; -0,8)$$



Exercice 9

Faire l'étude complète des fonctions suivantes:

domaine de définition, limites aux bornes du domaine, équations d'éventuelles asymptotes

-déterminer les points d'intersection avec les axes

-étudier les variations de la fonction sur son domaine d'étude

-construire la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé

$$a) f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6}$$

$$d) f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 2x + 4}$$

$$g) f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$$

$$e) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x+1}$$

$$h) f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x}$$

$$f) f(x) = \frac{-x-3}{3x+2}$$

$$i) f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2x - 3}$$