

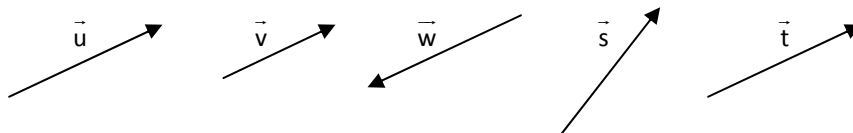
1. Caractéristiques d'un vecteur**DÉFINITION**

(caractéristiques d'un vecteur)

Un vecteur a trois caractéristiques :

- une direction,
- un sens,
- une longueur.

Deux vecteurs sont donc égaux, s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Exemples

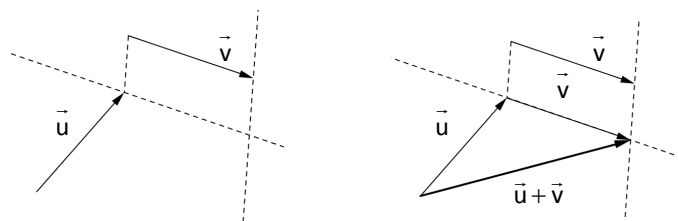
	\vec{u} et \vec{v}	\vec{u} et \vec{w}	\vec{u} et \vec{s}	\vec{u} et \vec{t}
même direction				
même sens				
même longueur				
égaux				

2. Addition de vecteurs**MÉTHODE**

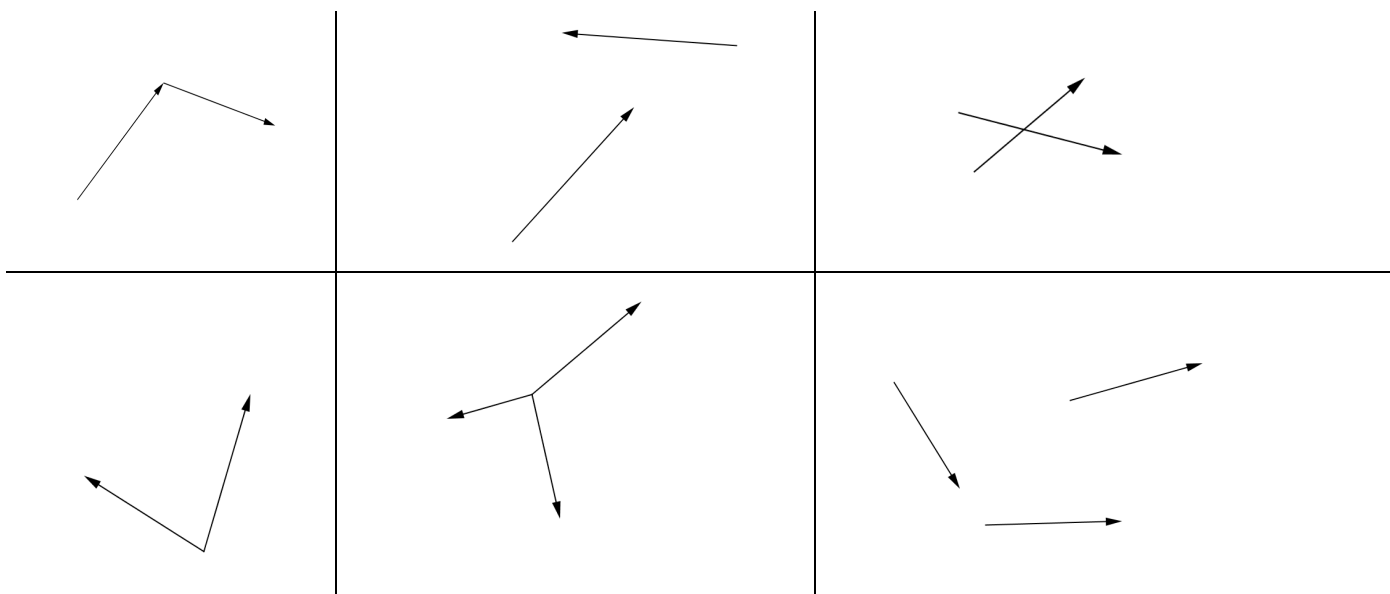
(opposé d'une somme)

Pour additionner des vecteurs, on les met bout à bout (origine – extrémité – origine – extrémité...).

Le vecteur résultant a l'origine du premier vecteur et l'extrémité du dernier vecteur de la somme.

Exemple**EXERCICE 01**

Additionner les vecteurs dans les 6 cas suivants :



3. Multiplication d'un vecteur par un réel**DÉFINITION**

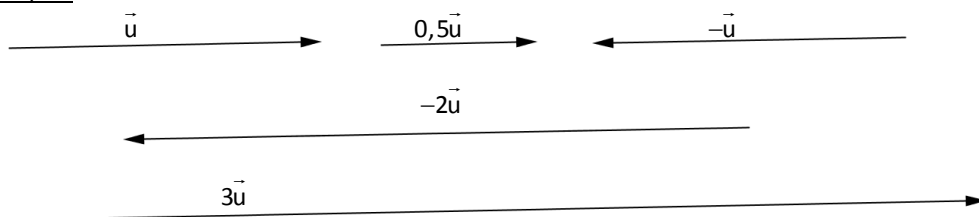
(multiplication d'un vecteur par un réel)

Le produit d'un vecteur par un réel positif k est un vecteur

- de même direction,
- de même sens,
- de longueur multipliée par k .

Le produit d'un vecteur par un réel négatif k est un vecteur

- de même direction,
- de sens opposé,
- de longueur multipliée par $-k$.

Exemples**EXERCICE 02**Construire les vecteurs $-2\vec{u}$ et $\frac{3}{2}\vec{u}$.**4. Vecteurs et repères ; coordonnées d'un vecteur****4.1 Dans le plan****DÉFINITION**

(coordonnées d'un vecteur dans le plan)

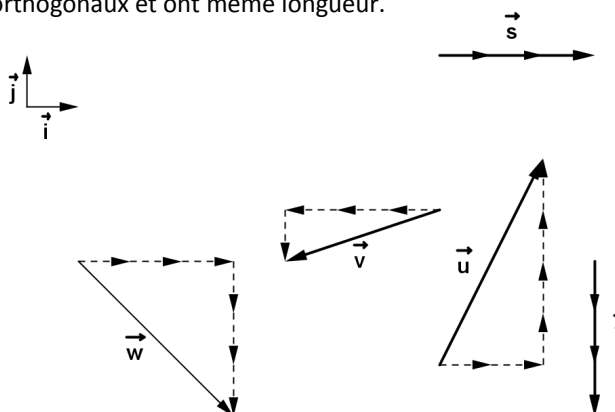
Soit \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs de directions différentes. On appelle (\vec{i}, \vec{j}) une base de vecteurs du plan.Tout vecteur \vec{u} peut se décomposer de sorte que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x et y sont alors les coordonnées du vecteur \vec{u} .On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.**Remarques**

- La base est dite orthogonale si \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux (angle de 90°).
- La base est dite normée si \vec{i} et \vec{j} ont même longueur.
- La base est dite orthonormée si \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux et ont même longueur.

Exemples

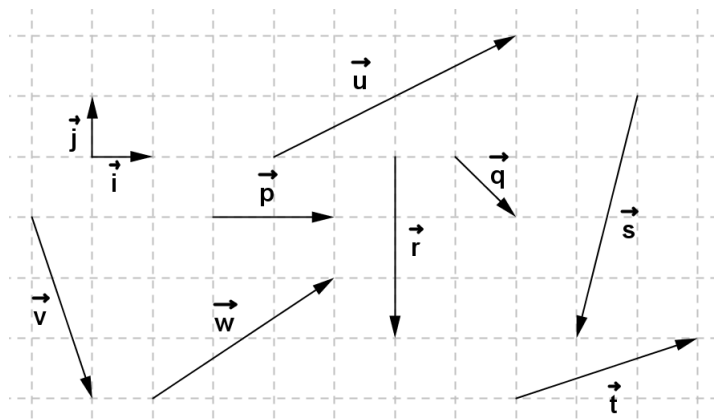
$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$



EXERCICE 03

Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

**EXERCICE 04**Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée. Construire les vecteurs suivants :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{p} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{q} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{s} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2 dans l'espace

Par analogie avec ce qui précède, on définit les coordonnées d'un vecteur dans l'espace :

DÉFINITION

(coordonnées d'un vecteur dans l'espace)

Soit \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs de directions différentes. On appelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de vecteurs de l'espace.Tout vecteur \vec{u} peut se décomposer de sorte que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x , y et z sont alors les coordonnées du vecteur \vec{u} .

On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

figures : voir livre EM, chapitre 4

5. Vecteurs et points**RÉSULTAT**

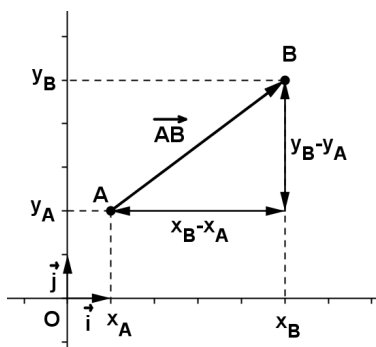
(coordonnées d'un vecteur dans le plan)

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Alors on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple $A(1; 2)$ et $B(5; 5)$

alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



RÉSULTAT

(coordonnées d'un vecteur dans l'espace)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points du plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\text{Alors on a : } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 05L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit les points : $A(1; -2; 3)$, $B(5; 0; 2)$, $C(3; -3; 0)$ et $D(0; -5; 4)$.Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{CB} .**6. Propriétés sur les coordonnées des vecteurs****RÉSULTATS**

(propriétés sur les coordonnées d'un vecteur)

dans le plan :Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$\text{Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont égaux si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.**dans l'espace :**L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\text{Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont égaux si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.**Exemples**L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.a) Soit les points $A(4; -1; 3)$, $B(-3; 2; 0)$ et $C(1; 2; -1)$. Déterminer les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-4 \\ 2-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

$$3 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21+6 \\ 9-6 \\ 9+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{u} \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer les coordonnées de D pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Soit $D(x_D; y_D; z_D)$. Alors $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 2 \\ z_D + 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = x_D - 1 \\ 3 = y_D - 2 \\ 3 = z_D + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 + 1 = x_D \\ 3 + 2 = y_D \\ 3 - 1 = z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -6 \\ y_D = 5 \\ z_D = 2 \end{cases} \text{ donc } D(-6; 5; 2).$$

EXERCICE 06

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points : $A(3; 2; 5)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(7; 0; -3)$ et $D(0; -1; -1)$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ et $\vec{w} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AD}$.

b) Déterminer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DF} = \vec{0}$.

Remarque : $\vec{0}$ est le vecteur nul. Ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Milieu d'un segment

PROPRIÉTÉ

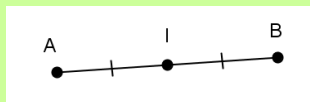
(milieu d'un segment)

Soit A, B deux points du plan.

I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}.$$



RÉSULTAT

(coordonnées du milieu d'un segment)

dans le plan :

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Alors les coordonnées du milieu I de AB sont : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

dans l'espace :

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Alors les coordonnées du milieu I de AB sont : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

Exemple

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(1; 2; -3)$, $B(-2; 4; 0)$ et $C(3; 0; -2)$.

Soit $A' = \text{mil}[BC]$, $B' = \text{mil}[AC]$ et $C' = \text{mil}[AB]$.

$$\text{Alors : } A' \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+(-2)}{2} \right) \Rightarrow A' \left(\frac{1}{2}, 2, -1 \right), \quad B' \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{-3+(-2)}{2} \right) \Rightarrow B' \left(2, 1, \frac{5}{2} \right)$$

$$\text{et } C' \left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{-3+0}{2} \right) \Rightarrow C' \left(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{3}{2} \right)$$

8. Vecteurs colinéaires**DÉFINITION**

(vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, donc si l'un des deux est égal au produit de l'autre par un réel k .Donc : \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{v}$ $(\exists k \in \mathbb{R} : \text{il existe un réel } k)$ **Exemples**Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 5 \end{pmatrix}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$)a) Est-ce que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ?

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2k \\ -2 = k \\ -6 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

donc $\vec{u} = -2\vec{v}$ et \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.b) Est-ce que les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont colinéaires ?

$$\vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -6k \\ -2 = 3k \\ -6 = -9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

donc \vec{u} et \vec{w} ne sont pas colinéaires.c) Déterminer les réels a et b pour que les vecteurs \vec{u} et \vec{t} soient colinéaires.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{t} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k\vec{t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = ka \\ -2 = kb \\ -6 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{a} & (1) \\ k = \frac{-2}{b} & (2) \\ k = \frac{-6}{5} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ dans } (1) : \frac{4}{a} = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow -6a = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow a = \frac{20}{-6} = -\frac{10}{3}$$

$$(3) \text{ dans } (2) : \frac{-2}{b} = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow -6b = -2 \cdot 5 \Leftrightarrow b = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{donc } \vec{t} \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 07L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$)Soit les points : $A(5 ; 1 ; -2)$, $B(-4 ; 4 ; 4)$, $C(-1 ; 0 ; -1)$, $D(2 ; -1 ; -3)$ et $E(a ; b ; 6)$ (avec b un réel).a) Est-ce que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ?b) Déterminer les réels x et y pour que \vec{u} et \vec{w} soient colinéaires.c) Est-ce que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires ?d) Déterminer les réels a et b pour que \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{ED} soient colinéaires.

9. Norme d'un vecteur**RÉSULTATS**

(norme d'un vecteur)

dans le plan :Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .• Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.La longueur du vecteur \vec{u} appelée **norme** de \vec{u} et notée $\|\vec{u}\|$ est calculée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

• Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.La longueur du vecteur \overrightarrow{AB} appelée **norme** de \overrightarrow{AB} et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est calculée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

dans l'espace :L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.• Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.La longueur du vecteur \vec{u} appelée **norme** de \vec{u} et notée $\|\vec{u}\|$ est calculée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace.La longueur du vecteur \overrightarrow{AB} appelée **norme** de \overrightarrow{AB} et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est calculée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Remarques :

- Au lieu de noter $\|\overrightarrow{AB}\|$ (norme du vecteur), on peut aussi noter AB (distance de A à B).
- Pour établir la formule $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ dans le plan, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de la figure du paragraphe 5 page 3 : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Exemples :Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(5; 0; -2)$ et $B(3; 2; 2)$.Calculer AB .

$$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Remarque : } \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

EXERCICE 08L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit les points : $A(1; 3; -2)$, $B(2; -1; 0)$, $C(6; -3; -1)$, $D(1; 3; -1)$, $E(3; 6; -2)$ et $F(0; 4; 0)$.

- Montrer que le triangle ABC est isocèle. Est-il équilatéral ?
- Montrer que le triangle DEF est rectangle.

10. Droites parallèles, points alignés**PROPRIÉTÉ**

(condition de parallélisme)

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.**PROPRIÉTÉ**

(condition d'alignement)

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.**Remarque**

Pour l'alignement de trois points, il suffit que deux vecteurs ayant comme extrémités ces trois points soient colinéaires.

Donc : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ou \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} ou \overrightarrow{CB} et \overrightarrow{AC} ou ...**Exemples :**L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points A(5 ; 0 ; -2), B(3 ; 2 ; 2), C(1 ; 0 ; 1) et D(-2 ; 3 ; 7).

a) Est-ce que les points B, C et D sont alignés ?

B, C et D sont alignés

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}$ et \overrightarrow{BD} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BD}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-2 \\ 7-2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -5k \\ -2 = k \\ -1 = 5k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ k = -2 \\ k = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Donc B, C et D ne sont pas alignés.

b) Est-ce les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

(AB) et (CD) sont parallèles

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{CD} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \\ 2+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-0 \\ 7-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -3k \\ 2 = 3k \\ 4 = 6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

c) Déterminer les réels a et b pour que A, B et E(a ; -3 ; b) soient alignés.

A, B et E sont alignés

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AE} sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AE}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \\ 2+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a-5 \\ -3-0 \\ b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = k(a-5) \\ 2 = -3k \\ 4 = k(b+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-2}{a-5} & (1) \\ k = -\frac{2}{3} & (2) \\ k = \frac{4}{b+2} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \text{ dans } (1) : -\frac{2}{3} = \frac{-2}{a-5} \Leftrightarrow -2(a-5) = -6 \Leftrightarrow a-5 = 3 \Leftrightarrow a = 8$$

$$(2) \text{ dans } (3) : -\frac{2}{3} = \frac{4}{b+2} \Leftrightarrow -2(b+2) = 12 \Leftrightarrow b+2 = -6 \Leftrightarrow b = -8$$

donc E(8 ; -3 ; -8)

EXERCICE 09L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points : A(-4 ; 1 ; 2), B(-1 ; -1 ; 3), C(2 ; -3 ; 4), D(-5 ; 6 ; 1), E(4 ; 0 ; 4), F(-2 ; y ; 1) et G(x ; 2 ; -3).

a) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

b) Est-ce que les points A, D et E sont alignés ?

c) Est-ce que les droites (CD) et (EB) sont parallèles ?

d) Est-ce que les droites (AB) et (DE) sont parallèles ?

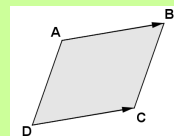
e) Déterminer les réels x et y pour que (FG) et (AB) soient parallèles.

11. Parallélogrammes**PROPRIÉTÉ**

(parallélogramme et vecteurs)

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(ou bien $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ ou ...)

**Exemple :**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points I(5 ; 3 ; -1), J(-3 ; 5 ; 2) et K(2 ; 0 ; -1).

Déterminer le point L pour que IJKL soit un parallélogramme.

(IJKL) est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \vec{IJ} = \vec{LK} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3-5 \\ 5-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_L \\ -y_L \\ -1-z_L \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 = 2-x_L \\ 2 = -y_L \\ 3 = -1-z_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 10 \\ y_L = -2 \\ z_L = -4 \end{cases}$$

donc L(10 ; -2 ; -4)

EXERCICE 10

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Soit les points : A(3 ; 2 ; -1), B(-4 ; 1 ; 3) et C(2 ; -1 ; 2).

Déterminer le point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

2° Soit les points E(2 ; 1 ; 3), F(-3 ; -4 ; 6), G(0 ; 4 ; 8) et H(-3 ; 3 ; 2).

Est-ce que EFGH est un parallélogramme ?

3° Soit I = mil[EF], J = mil[FG], K = mil[GH] et L = mil[HE].

a) Calculer les coordonnées de I, J, K et L.

b) Montrer que IJKL est un parallélogramme.

c) Montrer que (IJ) et (EG) sont parallèles.

EXERCICES DU LIVRE

Exercice 299 page 268

Exercice 301 page 268

Exercice 302 page 268

Exercice 303 page 268

Exercice 304 page 268

Exercice 310 page 269

Exercice 316 page 271

EXERCICE 11

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Soit $A(1; 2; -3)$, $B(-1; 3; 3)$ et $C(4; -1; 2)$.

Déterminer les coordonnées du point D afin que ABCD soit un parallélogramme.

b) Soit $E(2; 3; 2)$, $F(-2; -1; 2)$ et $G(-2; 3; -2)$.

Déterminer la nature du triangle EFG (équilatéral, isocèle, rectangle...).

c) Soit $H(3; 0; -1)$, $I(-2; 3; 2)$ et $J(1; 2; -2)$.

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\vec{IM} = \vec{HI} + 3\vec{HJ}$

d) Dans chacun des cas suivants, dire si les points K, L et N sont alignés :

- $K(3; -1; 2)$, $L(0; 2; 4)$ et $N(2; 0; -3)$
- $K(-4; 1; 3)$, $L(-2; 0; 5)$ et $N(0; -1; 7)$

e) Soit $P(2; -1; 5)$, $Q(0; -2; 3)$, $R(5; -2; -2)$ et $S(1; a; b)$.

Déterminer les réels a et b afin que (PQ) et (RS) soient parallèles.

f) Trouver les réels a et b afin que $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Corrigé

a) $D(6; -2; -4)$; b) EFG est un triangle équilatéral; c) $M(-13; 12; 2)$; d) • non • oui; e) $a = -4$ et $b = -6$; f) $a = -4$ et $b = 2,5$

12. Équations de droites**a) Vecteur directeur**

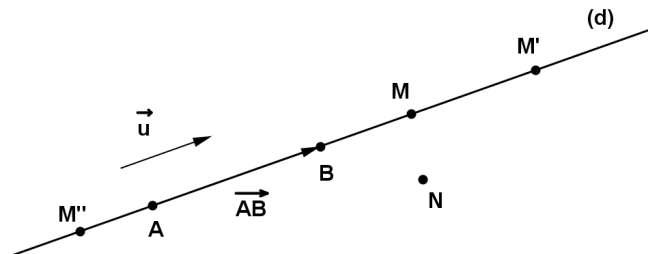
Deux points distincts A et B définissent une droite (d).

La direction de cette droite est celle du vecteur \vec{AB} .

Le vecteur \vec{AB} est appelé un **vecteur directeur** de la droite.

Tout vecteur \vec{u} colinéaire à \vec{AB} est aussi un vecteur directeur.

Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs \vec{AM} et \vec{AB} sont colinéaires.

Exemple :

Sur la figure, M, M' et M'' appartiennent à la droite (d) : \vec{AM} , $\vec{AM'}$, $\vec{AM''}$ et \vec{AB} sont colinéaires.

Le point N n'appartient pas à la droite (d) : \vec{AN} et \vec{AB} ne sont pas colinéaires.

b) Équation paramétrique d'une droite

Exemple : Soit (d) la droite passant par $A(1; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M(x; y) \in (d)$

$\Leftrightarrow \vec{AM}$ et \vec{u} sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{AM} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k \cdot 2 \\ y+1 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k+1 \\ y = k-1 \end{cases}$$

Le dernier système obtenu s'appelle un système d'équations paramétriques de la droite (d).

Dans ce système, le rôle du paramètre est joué par le réel k.

On peut donner n'importe quelle valeur à k : le point (x; y) obtenu appartient toujours à la droite (d).

Pour s'en convaincre :

$$k = 1 : \begin{cases} x = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow (3; 0)$$

$$k = 2 : \begin{cases} x = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ y = 2 - 1 = 1 \end{cases} \rightarrow (5; 1)$$

$$k = 3 : \begin{cases} x = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ y = 3 - 1 = 2 \end{cases} \rightarrow (7; 2)$$

$$k = 4 : \begin{cases} x = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \\ y = 4 - 1 = 3 \end{cases} \rightarrow (9; 3)$$

$$k = 0 : \begin{cases} x = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ y = 0 - 1 = -1 \end{cases} \rightarrow (1; -1)$$

$$k = 0,5 : \begin{cases} x = 2 \cdot 0,5 + 1 = 2 \\ y = 0,5 - 1 = -0,5 \end{cases} \rightarrow (2; -0,5)$$

$$k = 0,2 : \begin{cases} x = 2 \cdot 0,2 + 1 = 1,4 \\ y = 0,2 - 1 = -0,8 \end{cases} \rightarrow (1,4; -0,8)$$

$$k = -1 : \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \\ y = -1 - 1 = -2 \end{cases} \rightarrow (-1; -2)$$

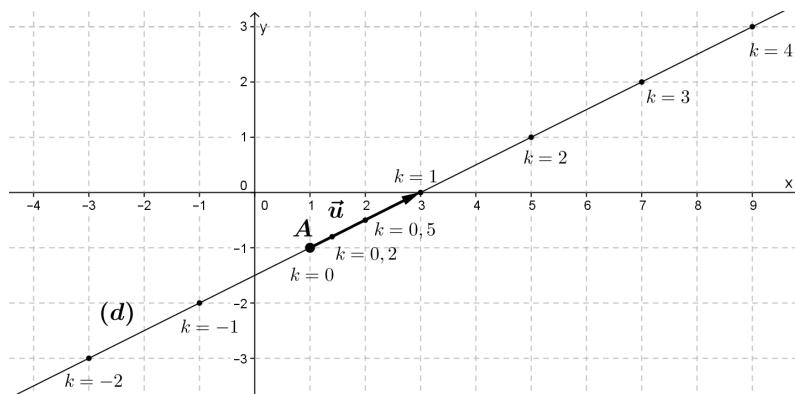
$$k = -2 : \begin{cases} x = 2 \cdot (-2) + 1 = -3 \\ y = -2 - 1 = -3 \end{cases} \rightarrow (-3; -3)$$

Remarque :

On retrouve les coordonnées de A et de \vec{u} dans le système d'équations :

$$(d) \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 1k - 1 \end{cases}$$

\uparrow \uparrow
 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ A(1; -1)



CAS GÉNÉRAL

(équation paramétrique d'une droite dans l'espace)

On peut généraliser le résultat précédent à l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

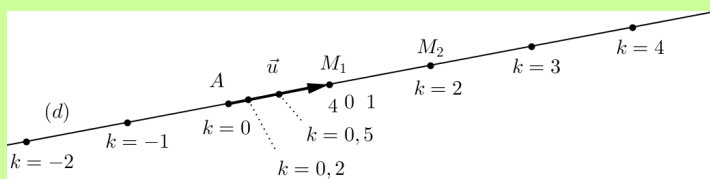
Soit (d) la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

$M(x; y; z) \in (d)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et \vec{u} sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k\alpha \\ y - y_A = k\beta \\ z - z_A = k\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \end{cases}$$



c) Équation cartésienne d'une droite

Exemple 1 : Soit (d) la droite passant par A(1; -1) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après b) on a : $(d) \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 & (1) \\ y = k - 1 & (2) \end{cases}$

$(2) : k = y + 1 \quad (2')$

$(2')$ dans (1) : $x = 2(y + 1) + 1$

$$\Leftrightarrow x = 2y + 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0 \quad \text{donc } (d) \equiv x - 2y - 3 = 0$$

Cette dernière équation est une équation cartésienne de la droite (d). Elle ne contient pas de paramètre.

Exemple 2 : Soit (e) la droite passant par B(2 ; -1 ; 4) et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M(x ; y ; z) \in (e)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et \vec{v} sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{BM} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-1) \\ z-4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = k \cdot (-1) \\ y+1 = k \cdot 3 \\ z-4 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k+2 & (1) \\ y = 3k-1 & (2) \\ z = k+4 & (3) \end{cases}$$

(3) : $k = z - 4$ (3')

(3') dans (1) : $x = -(z-4) + 2 \Leftrightarrow x + z - 6 = 0$

(3') dans (2) : $y = 3(z-4) - 1 \Leftrightarrow y - 3z + 13 = 0$

Finalement : $(d) \equiv \begin{cases} x = -k+2 \\ y = 3k-1 \\ z = k+4 \end{cases}$ ou bien $(d) \equiv \begin{cases} x + z - 6 = 0 \\ y - 3z + 13 = 0 \end{cases}$
 système de 3 équations paramétriques système de 2 équations cartésiennes

Ces deux systèmes représentent bien évidemment la même droite.

Remarque :

Si on ne connaît pas de vecteur directeur d'une droite, mais deux points de cette droite, alors le vecteur qui a pour extrémités ces deux points est un vecteur directeur de cette droite.

Ainsi p.ex. \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de la droite (AB).

EXERCICE 12

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Soit les points A(-2 ; 3 ; 1) et B(4 ; 2 ; 1) et le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{v} .
 b) Est-ce que B appartient à (d) ?

2° Soit les points C(4 ; -1 ; 2) et D(2 ; 0 ; 3)

- a) Déterminer un système d'équations paramétriques et cartésiennes de la droite (CD).
 b) Déterminer les réels a et b afin que le point E(a ; b ; 1) appartienne à (CD).

3° Soit les points F(1 ; 2 ; -3) et G(2 ; 1 ; 2)

- a) Déterminer un système d'équations paramétriques et cartésiennes de la droite (FG).
 b) Existe-t-il un point H sur (FG) tel que son abscisse soit le triple de son ordonnée. Si oui, en donner les coordonnées.

1° a) $(d) \equiv \begin{cases} x = k-2 \\ y = -k+3 \\ z = k+1 \end{cases}$ $(d) \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+3=0 \end{cases}$ b) non 2° a) $(CD) \equiv \begin{cases} x = -2k+4 \\ y = k-1 \\ z = k+2 \end{cases}$ $(CD) \equiv \begin{cases} x+2y-2=0 \\ y-z+3=0 \end{cases}$ b) a = 6 et b = -2
 3° a) $(FG) \equiv \begin{cases} x = k+1 \\ y = -k+2 \\ z = 5k-3 \end{cases}$ $(FG) \equiv \begin{cases} x+y-3=0 \\ 5x-z-8=0 \end{cases}$ b) $H(\frac{9}{4}; \frac{3}{4}; \frac{13}{4})$