

# AIDE-MÉMOIRE - SIGNE D'UN POLYNÔME

## 1. POLYNÔME DU PREMIER DEGRÉ

### 1.1. Définition

$ax + b$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$

### 1.2. Racines

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

### 1.3. Tableau des signes

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	signe de -a	0	signe de a

## 2. POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

### 2.1. Définition

$ax^2 + bx + c$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b, c \in \mathbb{R}$

### 2.2. Racines

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (\text{discriminant})$$

$$\text{si } \Delta > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{si } \Delta = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

$$\text{si } \Delta < 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pas de solutions dans  $\mathbb{R}$

### 2.3. Factorisation

$$\text{si } \Delta > 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{avec } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{si } \Delta = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

$$\text{avec } x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$\text{si } \Delta < 0$$

on ne peut pas factoriser

### 2.4. Tableau des signes

si  $\Delta > 0$  (on suppose  $x_1 < x_2$ )

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

si  $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

si  $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

Résumé: L'expression  $ax^2 + bx + c$  a le signe de a, sauf entre les racines.

### Utilisation (quelques exemples):

- Détermination d'un domaine de définition (fractions, racines carrées, logarithmes).
- Calcul de limites (lever la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$  par factorisation).
- Étude des variations d'une fonction (signe de la dérivée).

# SIGNE D'UN POLYNÔME : Exemples

1. Déterminer le signe de  $2x - 3$  et de  $-4x - 1$ .

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$a = 2$  (positif)

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$		- 0 +	

$$-4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$a = -4$  (négatif)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$-4x - 1$		+ 0 -	

2. Factoriser et déterminer le signe de  $x^2 + x - 6$  et de  $-4x^2 + 12x - 9$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$a = 1; b = 1; c = -6; \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$$\text{donc } x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x^2 + x - 6$		+ 0 - 0 +		

$$-4x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$a = -4; b = 12; c = -9; \Delta = 12^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-9) = 0$$

$$x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{donc } -4x^2 + 12x - 9 = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\left[2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right] = -(2x - 3)^2$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-4x^2 + 12x - 9$		- 0 -	

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

$$\text{condition: } 2x^2 - 5x - 3 \geq 0$$

$$a = 2; b = -5; c = -3; \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$		+ 0 - 0 +		

$$\text{dom } f = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup [3; +\infty[$$

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(3x + 2)(-4x^2 + 31x - 21) < 0$

$$\blacktriangleright 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\blacktriangleright -4x^2 + 31x - 21 = 0$$

$$a = -4; b = 31; c = -21; \Delta = 31^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-21) = 625 > 0$$

$$x_1 = \frac{-31+25}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-31-25}{-8} = \frac{-56}{-8} = 7$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	7	$+\infty$		
$3x + 2$	−	0	+	+	+		
$-4x^2 + 31x - 21$	−		−	0	+	0	−
$(3x + 2)(-4x^2 + 31x - 21)$	+	0	−	0	+	0	−

$$\text{donc } S = \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right[ \cup \left] \frac{3}{4}; 7 \right[$$

5. Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{2-x}}$

conditions:  $\frac{3x+1}{x-2} \geq 0$  et  $2-x \neq 0$

►  $3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$     ►  $2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$3x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$\frac{3x+1}{2-x}$	+	0	-	+

$\text{dom } f = ]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup ]2; +\infty[$

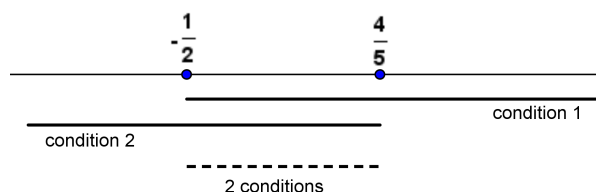
6. Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{4-5x}$

conditions:

$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$4-5x \geq 0 \Leftrightarrow -5x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5}$

$\text{dom } f = \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right]$



### **pour s'entraîner...**

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 4$

f)  $f(x) = \sqrt{2x-1}$

k)  $f(x) = \sqrt{3-4x} + \sqrt{x+5}$

b)  $f(x) = \frac{3x}{2x^2-6x}$

g)  $f(x) = x\sqrt{x^2-4}$

l)  $f(x) = (2x+5)\sqrt{2x^2+3x+5}$

c)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

h)  $f(x) = \sqrt{4x^2+x+12}$

m)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{2x-1}}$

d)  $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2-1}$

i)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{3x}$

n)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{2x-1}}$

e)  $f(x) = \frac{4}{3x^2-13x-10}$

j)  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{-x^2-x+2}}$

o)  $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{x^2+3x+2}}$

### **solutions finales**

a)  $\text{dom } f = \mathbb{R}$

f)  $\text{dom } f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

k)  $\text{dom } f = \left[-5; \frac{3}{4}\right]$

b)  $\text{dom } f = \mathbb{R}^* \setminus \{3\}$

g)  $\text{dom } f = ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

l)  $\text{dom } f = \mathbb{R}$

c)  $\text{dom } f = \mathbb{R}$

h)  $\text{dom } f = \mathbb{R}$

m)  $\text{dom } f = \left] \frac{1}{2}; +\infty\right[$

d)  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

i)  $\text{dom } f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; \frac{1}{2}]$

n)  $\text{dom } f = ]-\infty; -4] \cup \left] \frac{1}{2}; +\infty\right[$

e)  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}; 5\right\}$

j)  $\text{dom } f = ]-2; 1[$

o)  $\text{dom } f = ]-2; -1[ \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$