2G - Devoir en classe de mathématiques I,1

Exercice 1

1° a) dom $f = [-6;+\infty[$ et im $f = [-2;+\infty[$

b) f n'est pas bornée, car elle n'est pas majorée.

c) Oui, -3 est un minorant de f, car sur dom f: $f(x) \geq -3$.

(Remarque: f a un seul minimum: c'est le nombre -2. Mais f a une infinité de minorants: tous les nombres qui sont inférieurs à -2. Pour qu'un nombre m soit un minorant de f, il suffit que $m \leq f(x)$, pour tout x de dom f.)

d) Les racines de f sont -6, -1 et 4.

e) $S = [-6;-1] \cup [4;+\infty[$

2° a) dom $g = [-6;-1] \cup]1;5[$ et im $g =]-3;3]$

b) g est décroissante sur $[-6;-1]$ et sur $[3;5[$.

(Remarque: on ne peut pas écrire que g est décroissante sur $[-6;-1] \cup [3;5[$, car $[-6;-1] \cup [3;5[$ n'est pas un intervalle.)

c) $S =]1;2]$

d) $S = [-5;-1] \cup]1;2] \cup [4;5[$

(Remarque: on ne peut pas écrire $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow [-5;-1] \cup]1;2] \cup [4;5[$,
il faudrait plutôt écrire: $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in [-5;-1] \cup]1;2] \cup [4;5[$.
Cette notation est aussi fausse: $x \in [-5;-1]$ et $]1;2]$ et $[4;5[$.
Tout d'abord il faut écrire "ou" et non pas "et" et ensuite, il faut répéter le "$x \in$".
Donc: $x \in [-5;-1]$ ou $x \in]1;2]$ ou $x \in [4;5[$.)

Exercice 2

a) conditions: $\dfrac{3x+4}{2x-1} \geq 0$ et $2x-1 \neq 0$

$3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$ $\qquad 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3x+4}{2x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

donc dom $f = \left]-\infty;-\frac{4}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

(Remarque: la condition n'est <u>pas</u> $\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-1}} \geq 0$!!! Il faut que le radicand soit positif et non pas la racine carrée.)

b) conditions: $3x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$

$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$

donc dom $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice 3

a) dom f = dom g = $\mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x^2} + 5 = |x| + 5 \neq g(x)$ donc $f \neq g$.

b) conditions: $f: x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$g: x+1 \geq 0$ et $x+1 \neq 0$ donc $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

dom f = dom g = $]-1;+\infty[$

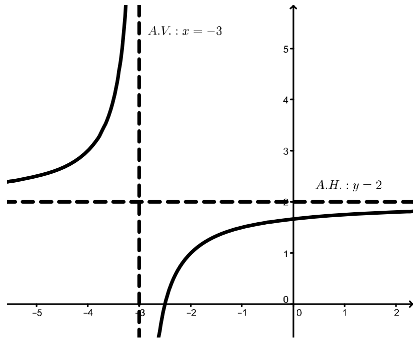
$$(\forall x \in]-1;+\infty[): f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}^2} = \frac{x+1-2\sqrt{x+1}}{x+1} = g(x)$$

donc $f = g$.

(Remarque: il ne faut pas confondre f et f(x) : f est une fonction, f est un nombre.
On parle du domaine d'une fonction, donc on écrit dom f et non <u>pas</u> dom f(x).
De même on écrit $|x| + 5 \neq g(x)$ et non pas $|x| + 5 \neq g$.)

Exercice 4

a) condition: $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ dom $f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$



b) $\begin{array}{c|cc} & 2 & 5 \\ -3 & & -6 \\ \hline & 2 & -1 \end{array}$ donc $f(x) = 2 + \dfrac{-1}{x+3}$

c) asymptote verticale: $x = -3$ asymptote horizontale: $y = 2$

(Remarque: asymptote verticale : -3 n'est pas correct,

car -3 n'est pas l'équation d'une droite)

Exercice 5

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 28}$

conditions: $x^2 + 3x - 28 \neq 0$

$\Delta = 9 + 4 \cdot 28 = 121$ $x_1 = \dfrac{-3+11}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-3-11}{2} = -7$

donc dom $f = \mathbb{R}\setminus\{-7;4\}$

$g(x) = \sqrt{x}$ dom $g = [0;+\infty[$

b) $x \in$ dom $g \Leftrightarrow x \geq 0$

$g(x) \in$ dom $f \Leftrightarrow g(x) \neq 4$ et $g(x) \neq -7$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 4$ et $\sqrt{x} \neq -7$

$\Leftrightarrow x \neq 16$

dom$(f \circ g) = [0;16[\cup]16;+\infty[$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} - 28} = \dfrac{1}{x + 3\sqrt{x} - 28}$

b) $x \in$ dom $f \Leftrightarrow x \neq 4$ et $x \neq -7$

$f(x) \in$ dom $g \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 \geq 0$

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
$x^2 + 3x - 28$		$+$	0	$-$	0	$+$	

dom$(g \circ f) =]-\infty;-7[\cup]4;+\infty[$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 3x - 28}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 28}}$

Exercice 6

a) $g(x) = x^2$ $h(x) = 2x + 7$ $i(x) = \sqrt{x}$ $f = i \circ h \circ g$

b) $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = \sqrt{x}$ $i(x) = x - 7$ $j(x) = \frac{1}{x}$ $k(x) = 4x + 5$ $f = k \circ j \circ i \circ h \circ g$

2G - Corrigé du devoir en classe de mathématiques I,2

Exercice 1

a) conditions: $\dfrac{-x-1}{x-1} \geq 0$ et $x-1 \neq 0$

$-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \qquad x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-1}{x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

donc $\text{dom } f = [-1;1[$

b) conditions: $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$

donc $\text{dom } g = \left[-\dfrac{1}{2};3\right]$

Exercice 2

a) condition: $x^2+2x-15 \neq 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4+60 = 64; x_1 = \dfrac{-2+8}{2 \cdot 1} = 3; x_2 = \dfrac{-2-8}{2 \cdot 1} = -5$

donc $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-5;3\}$

b) ♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ A.H.: $y=-1$

♦ $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x+24}^{\to 9}}{\underbrace{x^2+2x-15}_{\to 0}}$ il faut distinguer les limites à droite et à gauche

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x^2+2x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x+24}^{\to 9}}{\underbrace{x^2+2x-15}_{\to 0^+}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x+24}^{\to 9}}{\underbrace{x^2+2x-15}_{\to 0^-}} = -\infty$ A.V.: $x=-5$

♦ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x+24}^{\to 9}}{\underbrace{x^2+2x-15}_{\to 0}}$ il faut distinguer les limites à droite et à gauche

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x+24}^{\to 9}}{\underbrace{x^2+2x-15}_{\to 0^-}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\overbrace{-x^2-2x+24}^{\to 9}}{\underbrace{x^2+2x-15}_{\to 0^+}} = +\infty$ A.V.: $x=3$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overbrace{x^3 - x^2 - 20x + 36}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 + 3x - 10}_{\to 0}}$ f.i.: il faut factoriser

	1	-1	-20	36
2		2	2	-36
	1	1	-18	0

donc: $x^2 - x^2 - 20x + 36 = (x-2)(x^2 + x - 18)$

$x^2 + 3x - 10$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$

$x_1 = \dfrac{-3+7}{2 \cdot 1} = 2; x_2 = \dfrac{-3-7}{2 \cdot 1} = -5$

donc $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$

finalement $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+x-18)}{(x-2)(x+5)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overbrace{x^2+x-18}^{\to -12}}{\underbrace{x+5}_{\to 7}} = -\dfrac{12}{7}$

b) (1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 - x^2 - 20x + 36}{x^2 + 3x - 10} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 - x^2 - 20x + 36}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 = 1$

(3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^2 - 20x + 36}{x^2 + 3x - 10} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^2 - 20x + 36}{x^2 + 3x - 10} - \dfrac{x(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 3x - 10}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^2 - 20x + 36}{x^2 + 3x - 10} - \dfrac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^2 + 3x - 10}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^2 - 20x + 36 - x^3 - 3x^2 + 10x}{x^2 + 3x - 10}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{-4x^2 - 10x + 36}{x^2 + 3x - 10}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-4x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -4 = -4$

donc le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation: $y = x - 4$ si $x \to \pm\infty$.

Exercice 4

a) dom $f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et im $f =]-\infty; -2[\cup [1; +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ n'existe pas $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

c) A.H.: $y = -2$ si $x \to -\infty$

A.O.: $y = x$ si $x \to +\infty$

A.V.: $x = -1$

2G - Corrigé du devoir en classe de mathématiques I,3

Exercice 1

conditions: $\frac{-1-3x}{4x-1} \geq 0$ et $4x-1 \neq 0$ et $x \geq 0$

$-1-3x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ $\quad$ $4x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-1-3x$		+	0	−		−	
$4x-1$		−		−	0	+	
$\frac{-1-3x}{4x-1}$		−	0	+	‖	−	

donc dom f $= \left[0; \frac{1}{4}\right[$ (ne pas oublier la dernière condition $x \geq 0$)

Exercice 2

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ $\quad$ A.H.: $y = 2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\overbrace{2x^2+3x-4}^{\to 1}}{\underbrace{x^2+3x-4}_{\to 0}}$ $\quad$ il faut distinguer les limites à droite et à gauche

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		+	0	−	0	+	

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{2x^2+3x-4}^{\to 1}}{\underbrace{x^2+3x-4}_{\to 0^-}} = -\infty$ $\quad$ et $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{2x^2+3x-4}^{\to 1}}{\underbrace{x^2+3x-4}_{\to 0^+}} = +\infty$ $\quad$ A.V.: $x = 1$

b) $(\forall x \in \text{dom } f') : f'(x) = \frac{(4x+3)(x^2+3x-4)-(2x^2+3x-4)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2}$

$= \frac{4x^3+12x^2-16x+3x^2+9x-12-4x^3-6x^2-6x^2-9x+8x+12}{(x^2+3x-4)^2} = \frac{3x^2-8x}{(x^2+3x-4)^2}$

Exercice 3

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 2\sqrt{3}$

dom f = dom f′ = $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \text{dom} f') : f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + \frac{5}{2} \cdot 2x - 1 = 12x^3 - 6x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = -5(7x^2+4)^4 + 7$

dom f = dom f′ = $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \text{dom} f') : f'(x) = -5 \cdot 4(7x^2+4)^4 \cdot 7 \cdot 2x = -280x(7x^2+4)^3$

c) $f(x) = \frac{-3}{(5x+2)^2} = -3(5x+2)^{-2}$

condition: $5x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{5}$

dom f = dom f′ = $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

$(\forall x \in \text{dom} f') : f'(x) = -3 \cdot (-2)(5x+2)^{-3} \cdot 5 = \frac{30}{(5x+2)^3}$

d) $f(x) = \dfrac{5+2x}{1-3x}$

condition: $1-3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{3}$

dom f = dom f'= $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$$(\forall x \in \text{dom}f') : f'(x) = \frac{2(1-3x)-(5+2x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{2-6x+15+6x}{(1-3x)^2} = \frac{17}{(1-3x)^2}$$

e) $f(x) = \overbrace{2x^2}^{u}\overbrace{\sqrt{x+1}}^{v}$

condition: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

dom f = $[-1;+\infty[$ dom f' = $]-1;+\infty[$

$$(\forall x \in \text{dom}f') : f'(x) = \overbrace{4x}^{u'}\overbrace{\sqrt{x+1}}^{v} + \overbrace{2x^2}^{u}\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}^{v'} = 4x\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{4x(x+1)+x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{4x^2+4x+x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2+4x}{\sqrt{x+1}}$$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-4x-21}$

condition: $x^2-4x-21 \geq 0$

$\Delta = 16+84 = 100; x_1 = \dfrac{4+10}{2} = 7; x_2 = \dfrac{4-10}{2} = -3$

x	$-\infty$		-3		7		$+\infty$
$x^2-4x-21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

dom f = $]-\infty;-3] \cup [7;+\infty[$ et dom f' = $]-\infty;-3[\cup]7;+\infty[$

$$(\forall x \in \text{dom}f') : f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x-21}} = \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x-21}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-21}}$$

Exercice 4

a) dom f = $\mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ et im f = $]-\infty;2[\cup [3;+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$

c) A.H.: $y = 2$ si $x \to -\infty$

A.O.: $y = x-1$ si $x \to +\infty$

A.V.: $x = -1$ et $x = 2$

2G - Corrigé du devoir en classe de mathématiques II,1

Exercice 1

$f(x) = \dfrac{4x^2-8x-5}{x^2-2x-8}$

a) condition: $x^2-2x-8 \neq 0$ $\qquad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36;$

$x_1 = \dfrac{-(-2)+6}{2 \cdot 1} = 4; x_2 = \dfrac{-(-2)-6}{2 \cdot 1} = -2$ $\qquad$ donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2;4\}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2}{x^2} = 4$ $\quad$ A.H.: $y = 4$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{x^2} = 4$ $\quad$ A.H.: $y = 4$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\overbrace{4x^2-8x-5}^{\to 27}}{\underbrace{x^2-2x-8}_{\to 0}}$ $\qquad$ il faut distinguer les limites à droite et à gauche

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{\overbrace{4x^2-8x-5}^{\to 27}}{\underbrace{x^2-2x-8}_{\to 0^+}} = +\infty$ $\quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{\overbrace{4x^2-8x-5}^{\to 27}}{\underbrace{x^2-2x-8}_{\to 0^-}} = -\infty$ $\quad$ A.V.: $x = -2$

$\lim\limits_{x\to4} f(x) = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{\overbrace{4x^2-8x-5}^{\to 27}}{\underbrace{x^2-2x-8}_{\to 0}}$ $\qquad$ il faut distinguer les limites à droite et à gauche

$\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{\overbrace{4x^2-8x-5}^{\to 27}}{\underbrace{x^2-2x-8}_{\to 0^-}} = -\infty$ $\quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{\overbrace{4x^2-8x-5}^{\to 27}}{\underbrace{x^2-2x-8}_{\to 0^+}} = +\infty$ $\quad$ A.V.: $x = 4$

c) $\left(\forall x \in \operatorname{dom} f'\right) : f'(x) = \dfrac{(8x-8)(x^2-2x-8)-(4x^2-8x-5)(2x-2)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$

$= \dfrac{8x^3-16x^2-64x-8x^2+16x+64-8x^3+8x^2+16x^2-16x+10x-10}{\left(x^2-2x-8\right)^2} = \dfrac{-54x+54}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -54x+54 = 0 \Leftrightarrow 54x = 54 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-54x+54$		$+$	0	$-$	

tableau des variations:

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
f'		$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	
f	4	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	4

$f(1) = \dfrac{4-8-5}{1-2-8} = 1$

e) intersection avec l'axe des abscisses:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2-8x-5 = 0$

$\overset{\Delta=144}{\Leftrightarrow} x = \frac{20}{8} = 2,5$ ou $x = \frac{-4}{8} = -0,5$

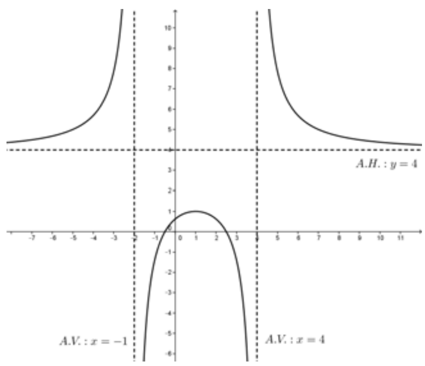
$C_f \cap (Ox)$: $A(-0,5;0)$ et $B(2,5;0)$

intersection avec l'axe des ordonnées:

$f(0) = \dfrac{-5}{-8} = 0,625$

$C_f \cap (Oy)$: $C(0;0,625)$

f)



Exercice 2

a)

prix	kg vendus	recette journalière
5,40 €	75 kg	$5.40 \cdot 75 = 405$ €
5,20 €	$75 + 5 = 80$ kg	$5.20 \cdot 80 = 416$ €
4,00 €	$75 + 7 \cdot 5 = 110$ kg	$4 \cdot 110 = 440$ €

b)

prix	kg vendus	recette journalière
p €	$75 + 5 \cdot \dfrac{5,40 - p}{0,2}$ kg	$p\left(75 + 5 \cdot \dfrac{5.40 - p}{0.2}\right) = 210p - 25p^2$ €

avec $p \in [0; 5,40]$

c) $(\forall p \in [0; 5,40])$: $R'(p) = 210 - 50p$

$R'(p) = 0 \Leftrightarrow 210 - 50p = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{210}{50} = 4,20$

p	0		4,2		5,4
R'		+	0	−	
R		↗	max	↘	

La recette est donc maximale si le prix au kilo est de 4,20 €.

Dans ce cas, la recette vaut $R(4,2) = 210 \cdot 4.2 - 25 \cdot (4.2)^2 = 441$ €.

Exercice 3

a) x et y sont les dimensions d'une cage (voir figure).

La longueur totale de la clôture est de 288m, donc $8x + 9y = 288$. (on compte "les x" et "les y" sur la figure)

Donc $9y = 288 - 8x \Leftrightarrow y = \dfrac{288 - 8x}{9}$.

Surface d'une cage: $x \cdot y$

Donc $S(x) = x \cdot \dfrac{288 - 8x}{9} = \dfrac{288x - 8x^2}{9}$

si $y = 0$, alors $8x = 288 \Leftrightarrow x = 36$

Donc $x \in [0; 36]$.

b) $(\forall x \in [0; 36])$: $S'(x) = \dfrac{288 - 16x}{9}$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 288 - 16x = 0 \Leftrightarrow 16x = 288 \Leftrightarrow x = 18$

signe de la dérivée:

x	$-\infty$		18		$+\infty$
$\dfrac{288 - 16x}{9}$		+	0	−	

tableau des variations:

x	0		18		36
S'		+	0	−	
S		↗	max	↘	

$S(18) = \dfrac{288 \cdot 18 - 8 \cdot 18^2}{9} = 288$

Si $x = 18$, alors $y = \dfrac{288 - 8 \cdot 18}{9} = 16$.

L'aire maximale de $288 m^2$ est atteinte si $x = 18$ m et $y = 16$ m.

2G – Correction du devoir en classe de mathématiques II,2

Exercice 1

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{t}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

Exercice 2

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{ST} - 3\overrightarrow{UV}$

$$2\begin{pmatrix}-3-4\\2+2\\0-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2+2\\-3-1\\2-5\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-7\\4\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}4\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14-12\\8+12\\-2+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-26\\20\\7\end{pmatrix}$$

b) $3\overrightarrow{TW} - \overrightarrow{US} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\begin{pmatrix}x_W+3\\y_W-2\\z_w-0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4+2\\-2-1\\1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_W+9-6=0\\3y_W-6+3=0\\3z_w+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_W=-3\\3y_W=3\\3z_W=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_W=-1\\y_W=1\\z_W=-\frac{4}{3}\end{cases}$ donc W(−1 ; 1 ; $-\frac{4}{3}$).

Exercice 3

a) (IJKL) est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3-1\\-1-3\\-1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-6\\2+2\\-3+2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2=-2\\-4=4\\1=-1\end{cases}$ donc (IJKL) n'est pas un parallélogramme.

b) (IKJM) est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3-1\\2-3\\-3+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-x_M\\-1-y_M\\-1-z_M\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2=2-x_M\\-1=-1-y_M\\-1=-1-z_M\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=0\\y_M=0\\z_M=0\end{cases}$ donc M(0 ; 0 ; 0).

Exercice 4

a) PQ = $\sqrt{(5-3)^2+(5-1)^2+(-1+5)^2} = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

PR = $\sqrt{(7-3)^2+(3-1)^2+(-9+5)^2} = \sqrt{4^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

QR = $\sqrt{(7-5)^2+(3-5)^2+(-9+1)^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-8)^2} = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72} = 2\sqrt{6}$

on remarque que :

- PQ = PR, donc PQR est isocèle de sommet principal P
- $QR^2 = PQ^2 + PR^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PQR est aussi rectangle en P.

b) $A\left(\frac{3+5}{2};\frac{1+5}{2};\frac{-5-1}{2}\right) \Rightarrow A(4;3;-3)$ et $B\left(\frac{3+7}{2};\frac{1+3}{2};\frac{-5-9}{2}\right) \Rightarrow B(5;2;-7)$

(AB) et (QR) sont parallèles

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5-4\\2-3\\-7+3\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}7-5\\3-5\\-9+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1=2k\\-1=-2k\\-4=-8k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{2}\\k=\frac{1}{2}\\k=\frac{1}{2}\end{cases}$

donc (AB) et (QR) sont parallèles.

Exercice 5

D, E et F sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ \overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{EF}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+3 \\ 3-2 \\ -7-4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a-1 \\ b-3 \\ -3+7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k(a-1) \\ 1 = k(b-3) \\ -11 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{a-1} & (1) \\ k = \frac{1}{b-3} & (2) \\ k = \frac{-11}{4} & (3) \end{cases}$$

(3) dans (1) : $-\dfrac{11}{4} = \dfrac{4}{a-1} \Leftrightarrow -11(a-1) = 16 \Leftrightarrow a - 1 = -\dfrac{16}{11} \Leftrightarrow a = 1 - \dfrac{16}{11} = -\dfrac{5}{11}$

(3) dans (2) : $-\dfrac{11}{4} = \dfrac{1}{b-3} \Leftrightarrow -11(b-3) = 4 \Leftrightarrow b - 3 = -\dfrac{4}{11} \Leftrightarrow b = 3 - \dfrac{4}{11} = \dfrac{29}{11}$ donc $E(-\dfrac{5}{11}\ ;\ \dfrac{29}{11}\ ; -3)$