3G	Chapitre 6 – Systèmes d’équations	1

EXERCICE 01

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x-y=5 & (1) \\ x+y=3 & (2) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-8y=5 & (1) \\ 2x+3y=20 & (2) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1) \\ 3x+5y=13 & (2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+2y=4 & (1) \\ 2x-y=5 & (2) \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-y=-1 & (1) \\ 6x=4y-6 & (2) \end{cases}$ 7) $\begin{cases} y-x+1=0 & (1) \\ 2x-3y+6=0 & (2) \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2y+3x=9 & (1) \\ 4x-y=1 & (2) \end{cases}$

EXERCICE 02

Résoudre les systèmes suivants en écrivant d’abord chacune des deux équations sous la forme ax + by = c :

1) $\begin{cases} \dfrac{y}{2}+\dfrac{3}{2}=x+\dfrac{y}{3} & (1) \\ 2y-8=6x & (2) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x-2y)+3(x+y)=2 & (1) \\ 4(x+y)-3(x+y)=14 & (2) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y-2}{4}=1 & (1) \\ \dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y+2}{2}=-2 & (2) \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y-3}{2}=x-1 & (1) \\ \dfrac{x+1}{6}-\dfrac{2-y}{2}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3} & (2) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4(x-1)+3(y+1)=-8 & (1) \\ 6(x+2)-5(y+5)=5 & (2) \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-2)^2-(y+3)=(x-1)(x+2) & (1) \\ (1-2x)(1+2x)+(2x+1)^2=y+8 & (2) \end{cases}$

EXERCICE 03

Résoudre les systèmes suivants en effectuant d’abord un changement de variable adéquat :

1) $\begin{cases} 2x^2-\sqrt{1-2y}=5 & (1) \\ -x^2+3\sqrt{1-2y}=5 & (2) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x}-\dfrac{4}{y^2}=0 & (1) \\ 3\sqrt{x}+\dfrac{8}{y^2}=5 & (2) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4\sqrt{x+1}-\dfrac{6}{\sqrt{2y+3}}=9 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2y+3}}=4 & (2) \end{cases}$

EXERCICE 04

1) Un fleuriste vend deux types de bouquets de roses : l’un à 5 € et l’autre à 12 €. Mercredi dernier, il a vendu 100 bouquets et sa recette était de 913 €.
Combien de bouquets de chaque type a-t-il vendus ?

2) Un autre fleuriste propose deux types de bouquets : l'un composé de 5 roses jaunes et 4 iris pour 16 € et l'autre composé de 3 roses jaunes et 6 iris pour 15 €.
Quel est le prix d’une rose et d’un iris ?

3) Un particulier veut tapisser son salon. Il choisit deux sortes de papier : du papier imprimé et du papier uni ; il faut au total 9 rouleaux. La dépense serait de 120 € dans le cas du choix de 3 rouleaux de papier imprimé et 6 rouleaux de papier uni ; la dépense serait de 126,4 € dans le cas du choix de 4 rouleaux imprimés et 5 rouleaux de papier uni.
Quel est le prix d’un rouleau de papier imprimé ? d’un rouleau de papier uni ?

4) Un automobiliste dit : si je roule à 60km/h, j’arrive à 13 h, mais si je roule à 80km/h, j’arrive à 11 h.
Quelle distance a-t-il à parcourir, et à quelle heure est-il parti ?

5) Une enquête dans une ville de 7200 habitants a permis d’établir que 25 % des hommes et 33 % des femmes pratiquent régulièrement une activité sportive, ce qui a permis au maire de déclarer fièrement que 2064 habitants de sa ville pratiquent un sport. Calculer le nombre d’hommes et de femmes habitant dans la ville.

6) Un héritage de 105 500 € est partagé entre deux personnes. La première place son capital à 5 % et la deuxième à 6 %. Au bout d’un an les fortunes (capital plus intérêt) des deux personnes sont égales.
Calculer comment l’héritage a été partagé entre les deux personnes.

Solutions finales : 01 : 1) S = {(4;−1)} ; 2) S = {(7;2)} ; 3) S = {($\frac{6}{5}$; $\frac{13}{5}$)} ; 4) S = {(1;2)} ; 5) S = {(2;−1)} ; 6) S = {(1;3)} ; 7) S = {(9;8)} ; 8) S = {(1;3)}

02 : 1) S = {($\frac{13}{3}$;17)} ; 2) S = {(6;8)} ; 3) S = {(3;2)} ; 4) S = {(4;7)} ; 5) S = {($\frac{1}{2}$;−3)} ; 6) S = {(1;-2)}

03 : 1) S = { (−2 ; −4) ; (2 ; −4) } / 2) S = { (1 ; $-\frac{1}{2}$) ; (1 ; $\frac{1}{2}$) } / 3) S = { (8 ; $\frac{1}{2}$) }

04 : 1) 41 bouquets à 5 € et 59 bouquets à 12 € ; 2) une rose coûte 2 €, un iris 1,5 € ; 3) un rouleau de papier imprimé coûte 17,6 € et un rouleau de papier uni 11,2 € ; 4) il a parcouru 480 km et il est parti à 5 heures ; 5) dans la ville habitent 3900 hommes et 3300 femmes ; 6) la première personne à hérité de 53000 € et la deuxième de 52500 €.

A. Résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues

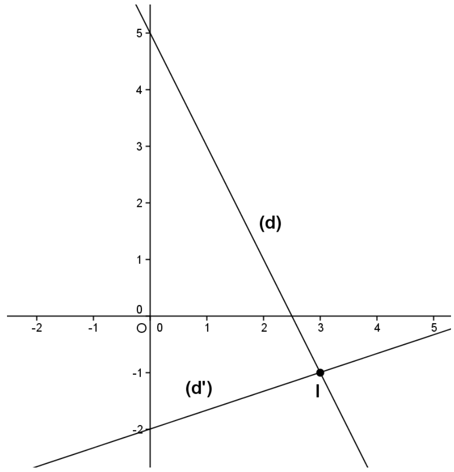
Soit le système : $\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ x-3y=6 & (2) \end{cases}$

L'équation (1) peut encore s'écrire $y = -2x + 5$.
L'équation (2) peut encore s'écrire $y = \frac{1}{3}x - 2$.

On a ainsi deux expressions de la forme $y = px + q$ auxquelles on peut associer une fonction du premier degré.

Or, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Donc : la solution du système $\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ x-3y=6 & (2) \end{cases}$ sont les coordonnées du point d'intersection des deux droites (d) et (d') d'équations :
$2x + y = 5$ et $x - 3y = 6$.



x	0	1
$y = -2x + 5$	5	3

x	0	3
$y = \frac{1}{3}x - 2$	-2	-1

Le point d'intersection est le point I(3 ;-1).

La solution du système est donc S = { (3 ; −1) }.

EXERCICE 05

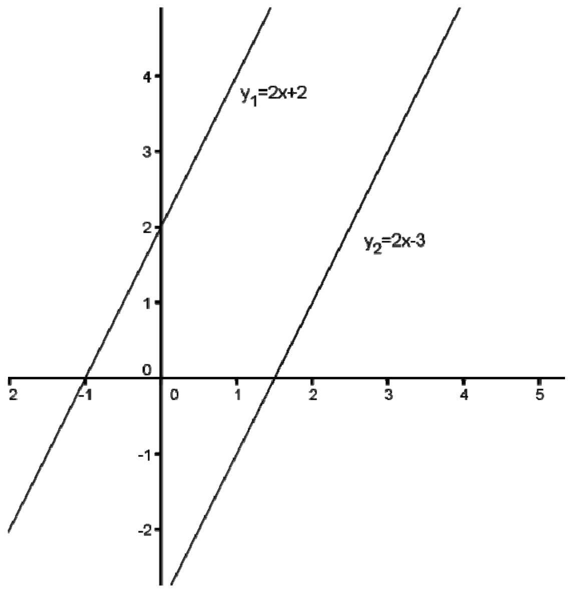
Résoudre graphiquement les systèmes d'équations 1) 3) 5) et 8) de l'exercice 01.

B. Systèmes impossibles

Soit le système $\begin{cases} 2x-y=-2 & |\cdot 2 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=-4 & (1) \\ 4x-2y=6 & (2) \end{cases}$

(1) – (2): $0 = -10$ → impossible!

S = Ø



interprétation graphique:

(1) ⇔ $-y = -2x - 2$ ⇔ $y = \mathbf{2}x + 2$
(2) ⇔ $-2y = -4x + 6$ ⇔ $y = \mathbf{2}x - 3$

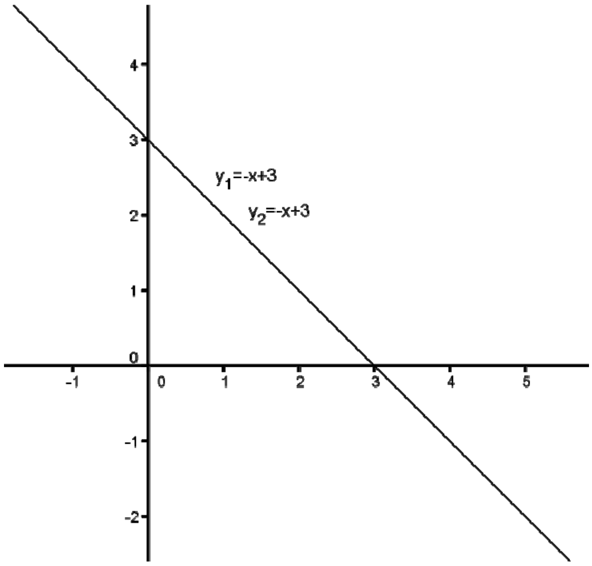
Ces droites ont la même pente, elles sont donc parallèles.

x	0	1
$y = 2x + 2$	2	4

x	0	1
$y = 2x - 3$	-3	-1

On voit sur la figure que les droites sont en effet strictement parallèles.
Elles n'ont pas de point d'intersection.

S = Ø



C. Systèmes indéterminés

Soit le système $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \quad |:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=3 \end{cases}$

On retrouve deux fois la même équation.
Il y a une infinité de solutions.

On a: $x + y = 3 \Leftrightarrow y = -x + 3$
Donc: $S = \{ (x ; -x + 3) \mid x \in \mathbb{R} \}$

(1) $\Leftrightarrow y = -x + 3$
(2) $\Leftrightarrow 2y = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -x + 3$

interprétation graphique :
Comme on a deux fois la même équation, on a des droites confondues.

x	0	1
$y_1 = -x + 3$	3	2

→ exercices 3, 4 et 6 page 74

D. Régionnement du plan

• L’ensemble des points (x ; y) tels que ax + by = c (avec a et b non simultanément nuls) est une droite (d).

• Cette droite partage le plan en deux demi-plans :
- Un demi-plan fermé P1 contenant la droite (d), qui est l’ensemble des points (x ; y) tels que : $ax + by \le c$.
- Un demi-plan fermé P2 contenant la droite (d), qui est l’ensemble des points (x ; y) tels que : $ax + by \ge c$.

• La droite (d) est appelée droite frontière des demi-plans P1 et P2.

• Si les inégalités sont strictes (< ou >), les demi-plans sont ouverts et ne contiennent pas la droite (d).

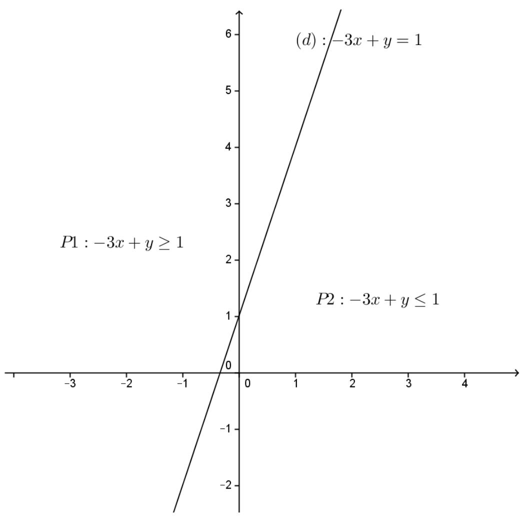
• Pour distinguer les deux demi-plans, on calcule la valeur de ax + by pour les coordonnées d’un point qui n’est pas sur la droite (d) - l’origine O(0 ;0) du repère par exemple lorsque c’est possible. (Si O se trouve sur la droite, il faut choisir un autre point !)
On regarde ensuite si cette valeur vérifie bien l’inéquation du demi-plan.

Exemple :
(d) : $-3x + y = 1$ P1 : $-3x + y \ge 1$ P2 : $-3x + y \le 1$

$-3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 3x + 1$

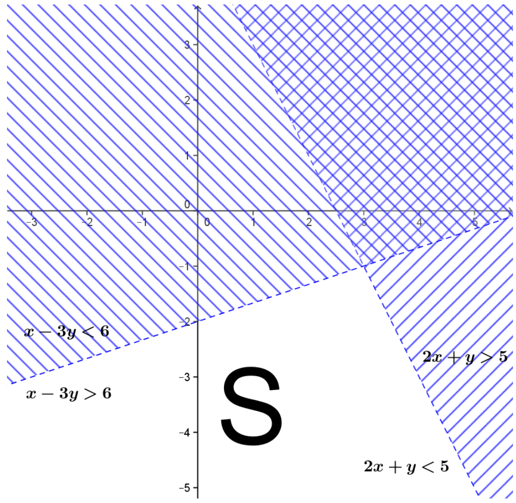
x	0	1
y = 3x + 1	1	4

Testons le point O(0 ; 0) : $-3 \cdot 0 + 0 = 0 \le 1$
→ le demi-plan contenant O est donc P2 : $-3x + y \le 1$.



E. Résolution graphique d'un système d'inéquations

• Exemple 1 : $\begin{cases} 2x + y \leq 5 & (1) \\ x - 3y \geq 6 & (2) \end{cases}$



$2x + y = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$.
$x - 3y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$.

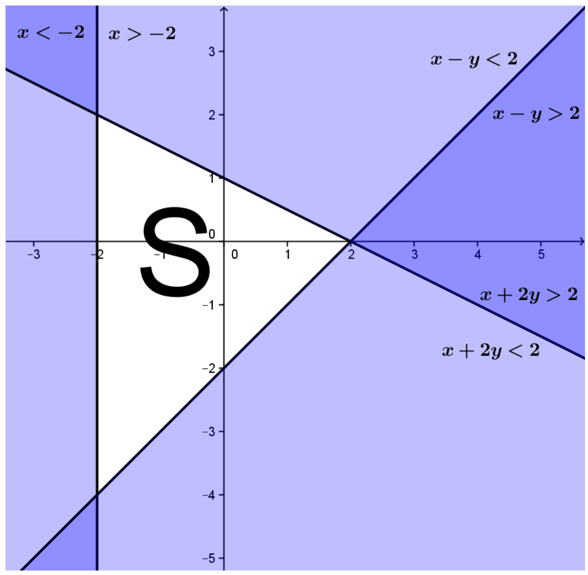
x	0	1
$y = -2x + 5$	5	3

x	0	3
$y = \frac{1}{3}x - 2$	−2	−1

Testons le point O(0 ; 0) :
(1) : $2\cdot0 + 0 = 0 < 5$ → O fait partie du demi-plan (1).
(2) : $0 - 3\cdot0 = 0 < 6$ → O ne fait pas partie du demi-plan (2).

On hachure les parties qui ne conviennent pas.
La solution est la partie non hachurée avec les frontières.

• Exemple 2 : $\begin{cases} x > -2 & (1) \\ x + 2y < 2 & (2) \\ x - y < 2 & (3) \end{cases}$



$x = -2$
$x + 2y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$
$x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$

x	0	2
$y = -\frac{1}{2}x + 1$	1	0

x	0	1
$y = x - 2$	−2	−1

Testons le point O(0 ; 0) :
(1) : $0 > -2$ → O fait partie du demi-plan (1)
(2) : $0 + 2\cdot0 = 0 < 2$ → O fait partie du demi-plan (2).
(3) : $0 - 0 = 0 < 2$ → O fait partie du demi-plan (3).

La solution est la partie non hachurée sans les frontières.

EXERCICE 06

Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y < 4 \\ 2x + y < 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + 2y \leq -1 \\ 2x - y \geq 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y > 1 \\ 2x + y < 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \leq 1 \\ 2x + y \geq 0 \\ x - 3y \geq 0 \end{cases}$