

## 1. Exemples introductifs

### Exemple 1

A une station-service, le prix à payer dépend du nombre de litres d'essence achetés.

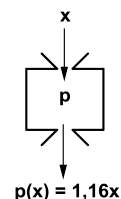


On dit qu'on exprime le prix **en fonction** du nombre de litres.

Si p.ex. 1 litre coûte 1,16 €, alors  $x$  litres coûtent  $1,16 \cdot x$  €.

Appelons  $p(x)$  (lire "p de x"), le prix en fonction des litres achetés.

On a :  $p(x) = 1,16x$



L'"objet"  $p$  est appelé **une fonction** en mathématiques. Une fonction "transforme" en fait un nombre en un autre nombre.

Combien coûtent 10 litres ?

$\rightarrow p(10) = 1,16 \cdot 10 = 11,6 \rightarrow 10$  litres coûtent 11,6 €.

(On dit que 11,6 est l'**image** de 10 par la fonction  $p$ .)

Combien coûtent 43,5 litres ?

$\rightarrow p(43,5) = 1,16 \cdot 43,5 = 50,46 \rightarrow 43,5$  litres coûtent 50,46 €.

(On dit que 50,46 est l'**image** de 43,5 par la fonction  $p$ .)

### Exemple 2

Soit maintenant une autre fonction  $f$  définie par la formule :  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ .

Calculons quelques images et résumons-les dans un **tableau des images** :

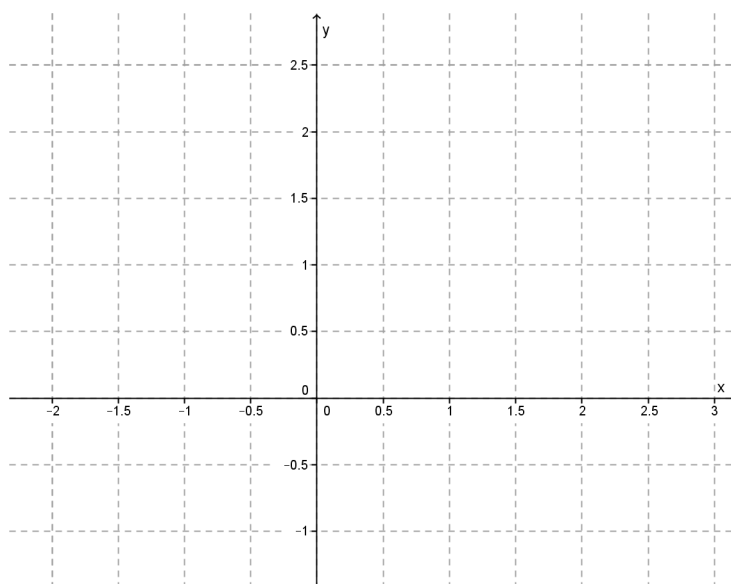
$x$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$							

Traçons maintenant la **représentation graphique** de la fonction  $f$ . Pour ce faire, on place (si possible) les points  $(x ; f(x))$  calculés plus haut dans un repère.

La **courbe représentative** (ou graphe) de la fonction  $f$  est souvent appelée  $C_f$ .

En faisant une lecture graphique de la gauche vers la droite, on remarque que :

- si  $x < \quad$  : la fonction  $f$  prend d'abord des valeurs de plus en plus petites. On dit qu'elle est **décroissante**.
- si  $x = \quad$  : la fonction  $f$  admet un **minimum local** ( ; ).
- si  $\quad < x < \quad$  : la fonction  $f$  prend des valeurs de plus en plus grandes. On dit qu'elle est **croissante**.
- si  $x = \quad$  : la fonction  $f$  admet un **maximum local** ( ; ).
- si  $x > \quad$  : la fonction  $f$  est à nouveau .



On peut résumer le « comportement » de la fonction  $f$  dans un **tableau des variations** :

$x$	
$f$	

Quelles sont les valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction  $f$  s'annule ?

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \quad$  ou  $x = \quad$ .

On appelle ces valeurs les **racines** de la fonction  $f$ .

## 2. Quelques notions et définitions

### 2.1 Fonction. Image. Représentation graphique.

Soit  $D$  un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de  $\mathbb{R}$ .

- Définir une fonction  $f$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est associer à chaque nombre  $x$  de  $D$  un unique réel noté  $f(x)$ .
- $D$  est appelé l'**ensemble de définition** de la fonction  $f$ .
- Le nombre  $f(x)$  s'appelle l'**image** de  $x$  par  $f$ .
- L'ensemble de tous les points  $(x ; f(x))$ ,  $x$  étant un nombre de  $D$  est noté  $C_f$  et appelé **représentation graphique, courbe représentative** ou **graphe** de  $f$ .

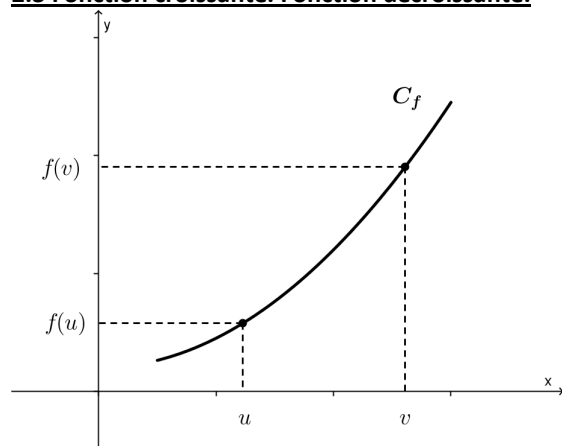
### 2.2 Antécédent. Racine.

- On appelle **antécédent** d'un nombre  $k$ , tout nombre  $x$  tel que  $f(x) = k$ .
- On appelle **racine** d'une fonction, tout nombre  $x$  tel que  $f(x) = 0$  (donc les antécédents de 0).

Remarque :

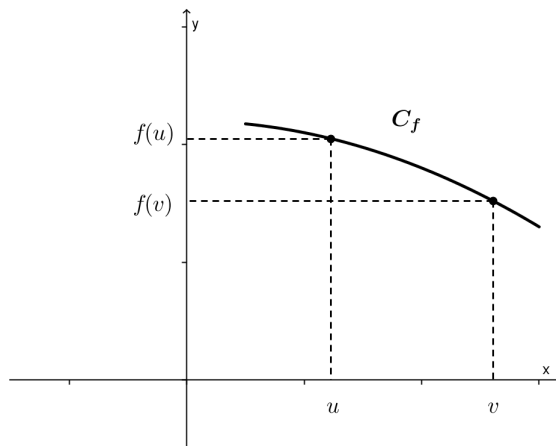
- Un nombre peut avoir plusieurs antécédents, mais au plus une image.

### 2.3 Fonction croissante. Fonction décroissante.



On dit que  $f$  est croissante sur un intervalle  $I$  si pour tous nombres  $u$  et  $v$  de l'intervalle  $I$  on a :

$$\text{si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v)$$



On dit que  $f$  est décroissante sur un intervalle  $I$  si pour tous nombres  $u$  et  $v$  de l'intervalle  $I$  on a :

$$\text{si } u < v \text{ alors } f(u) > f(v)$$

### 2.4. Maximum (local). Minimum (local).

Soit  $a$  un nombre appartenant au domaine de  $f$  et  $I$  un intervalle contenant  $a$ .

$f(a)$  est le **maximum** de  $f$  sur  $I$ , si pour tout  $x$  de  $I$  :  $f(x) \leq f(a)$ .

$f(a)$  est le **minimum** de  $f$  sur  $I$ , si pour tout  $x$  de  $I$  :  $f(x) \geq f(a)$ .

Soit  $a$  un nombre appartenant au domaine de  $f$  et  $I$  un intervalle de centre  $a$ .

On dit que  $f$  admet un **maximum local**  $f(a)$  en  $a$ , si pour tout  $x$  de  $I$  :  $f(x) \leq f(a)$ .

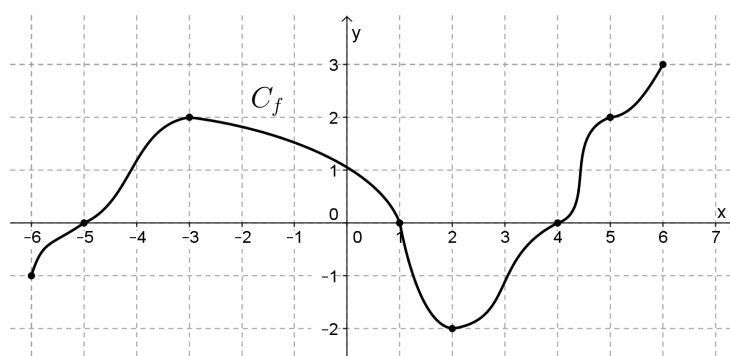
On dit que  $f$  admet un **minimum local**  $f(a)$  en  $a$ , si pour tout  $x$  de  $I$  :  $f(x) \geq f(a)$ .

Sur le graphique ci-contre :

Le maximum de  $f$  sur  $[-6 ; 6]$  est . Il est atteint en .

Le minimum de  $f$  sur  $[-6 ; 6]$  est . Il est atteint en .

$f$  admet aussi un maximum local : le point ( ; ).



**EXERCICE 01**

1° Regarder le graphique en bas de la page 2 pour répondre aux questions suivantes :

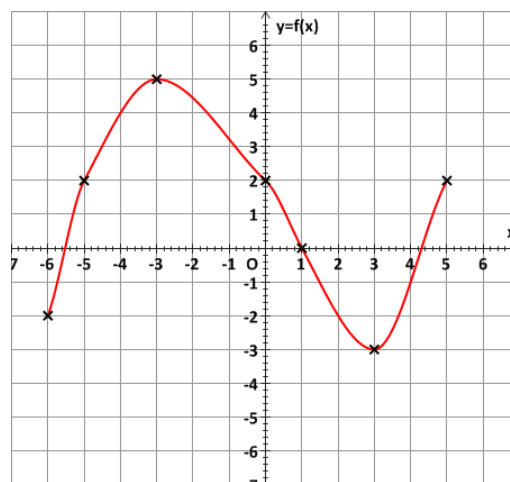
- Déterminer le domaine de  $f$ .
- Quelle est la valeur de  $f(5)$ ?
- Que vaut l'image de  $-3$ ?
- Quelles sont les racines de  $f$ ?
- Résoudre l'équation  $f(x) = -2$ .
- Résoudre l'inéquation  $f(x) < 2$ .
- Résoudre l'équation  $f(x) - 3 = 0$ .
- Sur quel(s) intervalle(s) la fonction  $f$  est-elle croissante?
- Combien d'antécédents a le nombre  $1$ ?
- Indiquer tous les nombres qui ont exactement 2 antécédents.

2° Dresser le tableau des variations de cette fonction  $f$ .

**EXERCICE 02**

Voici la représentation graphique d'une fonction  $f$ .

- Déterminer le domaine de  $f$ .
- Quelle est l'image de  $3$ ?
- Que vaut  $f(-5)$ ?
- Quel est le maximum de  $f$ ?
- En quel point est atteint le minimum de  $f$ ?
- Résoudre l'équation  $f(x) = 2$ .
- Déterminer une valeur exacte ou approchée des racines de  $f$ .
- Sur quels intervalles, la fonction  $f$  est-elle croissante?
- Résoudre l'inéquation  $f(x) < 5$ .
- Résoudre l'inéquation  $2f(x) - 4 \geq 0$ .



2° Dresser le tableau des variations de  $f$ .

**EXERCICE 03**

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 - 2x + 5$ ,  $g(x) = -5x + 5$  et  $h(x) = \frac{2}{7}x - 1$ .

- 1° Calculer : a)  $f(-3)$       b)  $f(100)$       c)  $g(9)$       d)  $h(\frac{2}{3})$  (donner le résultat sous forme de fraction).

2° Trouver les antécédents de  $5$  par les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

3° Vrai ou faux ? Justifier la réponse !

- le point de coordonnées  $(-1 ; 2)$  est sur la courbe représentative de la fonction  $f$ .
- le point de coordonnées  $(2 ; -15)$  est sur la courbe représentative de la fonction  $g$ .

4° Déterminer les coordonnées du/des point(s) d'intersection de  $C_f$  et  $C_g$ .

**EXERCICE 04**

Voici le tableau de variation d'une fonction  $f$  :

$x$	-6	-3	3	5	7
$f$	-4	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		5	-3	2	0

1° Vrai ou faux ? Justifier la réponse !

- $f(0) > f(1)$
- L'image de  $-3$  par la fonction  $f$  est  $3$ .
- $0$  n'a qu'un seul antécédent par la fonction  $f$ .

2° Recopier et compléter le plus précisément possible :

- $\dots \leq f(4) \leq \dots$
- si  $x \in [-6 ; 5]$ , alors  $\dots \leq f(x) \leq \dots$
- Le maximum de  $f$  est  $\dots$ .
- Le minimum de  $f$  sur  $[0 ; 7]$  est  $\dots$ .
- Le plus grand intervalle sur lequel  $f$  est croissante est  $\dots$ .

3° Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction  $f$  à partir de son tableau de variation.

**EXERCICE 05**

Déterminer le domaine de définition et les racines des fonctions définies par :

a)  $f(x) = 5x + 3$

d)  $f(x) = 4 + \frac{3}{x+5}$

h)  $f(x) = 3x^2 + 9$

k)  $f(x) = \frac{3}{x^2+1} - 3$

b)  $g(x) = x^2 + 5x$

e)  $g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$

i)  $g(x) = x^3 - 4x$

l)  $g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

c)  $h(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

g)  $h(x) = x^2 - 9$

j)  $h(x) = \frac{x^3+x}{x^2-4}$

m)  $h(x) = \frac{2}{x^2-7} - 1$

**Supplément : montrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle donné**

marque à suivre :

- on considère deux réels  $u$  et  $v$  de l'intervalle donné tels que  $u < v$
- on calcule le rapport  $T = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$  (appelé taux de variation)
- si  $T > 0$  alors la fonction est croissante ; si  $T < 0$  alors la fonction est décroissante

Explication :

- on a :  $u < v$   $\rightarrow$  donc  $v - u > 0$   
 $\rightarrow$  le dénominateur de  $T$  est donc positif  
 $\rightarrow$  le signe de  $T$  dépend donc du numérateur  $f(v) - f(u)$   
 $\rightarrow$  si  $f(v) - f(u) > 0$ , alors  $f(u) < f(v)$  et la fonction est croissante (voir définition page 2)  
 $\rightarrow$  si  $f(v) - f(u) < 0$ , alors  $f(u) > f(v)$  et la fonction est décroissante (voir définition page 2)

**Exemple 1**

Montrer que la fonction définie par  $f(x) = x^2 + 3$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$  et décroissante sur  $]-\infty ; 0]$ .

- soit  $u, v$  tels que  $u < v$  :

$$T = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{(v^2 + 3) - (u^2 + 3)}{v - u} = \frac{v^2 - u^2}{v - u} = \frac{v^2 - u^2}{v - u} = \frac{(v - u)(v + u)}{v - u} = v + u$$

- si  $u, v \in [0 ; +\infty[$ , alors  $T = v + u > 0$  et la fonction est croissante
- si  $u, v \in ]-\infty ; 0]$ , alors  $T = v + u < 0$  et la fonction est décroissante

**Exemple 2**

Montrer que la fonction définie par  $g(x) = 2x^2 - 4x$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

- soit  $u, v \in [1 ; +\infty[$  tels que  $u < v$  :

$$\begin{aligned} T &= \frac{g(v) - g(u)}{v - u} = \frac{2(v^2 - u^2) - 4(v - u)}{v - u} \\ &= \frac{(2v^2 - 4v) - (2u^2 - 4u)}{v - u} = \frac{2(v - u)(v + u) - 4(v - u)}{v - u} \\ &= \frac{2v^2 - 4v - 2u^2 + 4u}{v - u} = \frac{(v - u)[2(v + u) - 4]}{v - u} = \underset{1}{\cancel{v - u}} [2(v + u) - 4] = \underset{>2}{2v} + \underset{\geq 2}{2u} - 4 > 0 \end{aligned}$$

Donc  $g$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$

**EXERCICE 06**

a) Montrer que la fonction définie par  $f(x) = 4x + 2$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que la fonction définie par  $g(x) = -3x^2 + 5$  est décroissante sur  $]-\infty ; 0]$ .

c) Montrer que la fonction définie par  $f(x) = x^2 + 6x - 1$  est croissante sur  $[-3 ; +\infty[$ .