CHAPITRE I:

LES ENSEMBLES

ensemble 1. adv.: l'un avec l'autre, les uns avec les autres; *être ensemble, rire ensemble, mettre ensemble (p.ex. dans un même sac)* 2. n.m.: totalité d'éléments réunis. *Cela s'adresse à l'ensemble des habitants. J'ai lu l'ensemble de son oeuvre.* 3. n.m.: groupe de personnes ou de choses; *ensemble vocal (chanteurs), ensemble de plage (vêtements pour être portés ensemble)*

1.ENSEMBLES

1.1.Ensembles et éléments

Définition (ensemble, élément):
Un *ensemble* est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble s'appellent les *éléments* de cet ensemble.

Exemples:
- L'ensemble des élèves de votre classe.
- L'ensemble des feuilles d'un arbre.
- L'ensemble des nombres entiers de 1 à 7.

Souvent, on donne un nom à un ensemble (p.ex. 7ST3). En mathématiques, on choisit d'habitude une lettre majuscule.

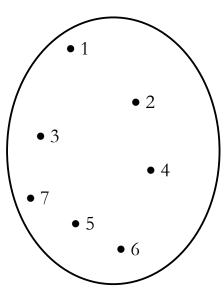
Exemple:
On va appeler A l'ensemble de tous les nombres entiers de 1 à 7. On dit aussi: « Soit A l'ensemble de tous les nombres entiers de 1 à 7. »

- L'ensemble A a éléments.
- 2 est / n'est pas un élément de l'ensemble A.
- 13 est / n'est pas un élément de l'ensemble A.

1.2.Représentation d'un ensemble

Pour représenter (ou dessiner) un ensemble, on utilise un diagramme de Venn[1].

Exemple:



A

Chaque élément de l'ensemble est représenté par un point.
A côté de ce point, on marque le nom de l'élément.
A côté de l'ensemble, on met le nom de celui-ci.

[1] d'après J.Venn: 1834-1923

Exercice:

Faire un diagramme de Venn des ensembles suivants:
F: ensemble des filles de votre classe.
L: ensemble des élèves de votre classe, qui portent des lunettes.
P: ensemble des nombres entiers pairs entre 1 et 13.

1.3.Écriture d'un ensemble

On peut écrire un ensemble de deux façons:

Définition (en extension):
Écrire un ensemble *en extension* veut dire donner une liste de tous ses éléments.

Exemple:

« Dans A il y a les éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 » est une définition en extension.
On écrit : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 } [2]

Définition (en compréhension):
Écrire un ensemble *en compréhension* veut dire donner une propriété caractéristique de ses éléments.

Exemple:

« Dans A il y a les nombres entiers de 1 à 7 » est une définition en compréhension.
on écrit : A = {x | x est un nombre entier de 1 à 7} [3]

Exercice:

Écrire les ensembles suivants en extension:
- A = { x | x est un nombre entier impair entre 2 et 14 }

- B = { x | x est un jour de la semaine où l'on a cours de maths }

Écrire les ensembles suivants en compréhension:
- C = { avril ; juin ; septembre ; novembre}

- D = { 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 }

---

[2] les symboles { et } s'appellent accolades.
[3] les symbole | veut dire « tel que »

1.4.Appartenance et inclusion

Définition (appartient à):
Soit E un ensemble et x un élément.
On dit que *x appartient à E* si x est un élément de E.
On écrit: $x \in E$.

Si x n'appartient pas à E, on écrit : $x \notin E$.

Exemples:

Soit l'ensemble A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}

On a: 1 A ; 3 A ; 8 A ; 9 A ; 5 A.

Définition (est inclus dans):
Soit E et F deux ensembles.
On dit que *E est inclus dans F* si tous les éléments de E appartiennent à F.
On note: $E \subset F$.

Si E n'est pas inclus dans F, on écrit : $E \not\subset F$.

Exemples:

Soient les ensembles suivants: A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}, B = {1 ; 2 ; 5}, C = {1 ; 2} et D = {1 ; 4 ; 8}

- B A, car
- B C, car
- C B, car
- D A, car
- C C, car
- {1 ; 2} A, car

1.5.Ensemble vide, ensembles finis et infinis

Définition (ensemble vide):
On appelle *ensemble vide* un ensemble ne contenant pas d'élément.
On note $\varnothing$ ou { }.

Remarque:

Pour n'importe quel ensemble E, on a toujours: $\varnothing \subset E$.

Définition (singleton):
On appelle *singleton* un ensemble qui contient exactement un élément.

Définition (paire):
On appelle *paire* un ensemble qui contient exactement deux éléments.

Exemples:

- L'ensemble {1 ; 2} est
- L'ensemble {3} est
- L'ensemble {1 ; 3 ; 4} est

Définition (ensemble fini):

On appelle *ensemble fini* un ensemble dont on peut déterminer le nombre d'éléments.

Définition (ensemble infini):

On appelle *ensemble infini* un ensemble dont on ne peut compter les éléments.

Exemples:

- {1 ; 2 ; 3 ; 4} est un ensemble , car
- {1 ; 2 ; … ; 99999}[4] est un ensemble , car
- L'ensemble de tous les entiers naturels est un ensemble , car

Notation:

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. $\mathbb{N}^* = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;...\}$

2.OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

2.1.Intersection

Soient A = {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11} et B = {3 ; 7 ; 13 ; 17 ; 19}.

Faire le diagramme de Venn de ces deux ensembles en ne représentant chaque élément qu'une seule fois.

Quels éléments sont à la fois dans A et dans B ?

Définition (intersection):

Soit E et F deux ensembles.
On appelle *intersection* de E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F.
On note cet ensemble $E \cap F$.

Remarque:

On lit "E inter F".

Exemples:

Soit A = {a ; b ; d ; e ; f ; g}, B = {a ; d ; g ; i ; j ; k} et C = {b ; e ; f ; l ; m}

- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $B \cap C =$
- $C \cap C =$

[4] les points … veulent dire que dans cet ensemble il y a aussi tous les entiers entre 2 et 99999.

2.2.Réunion

Définition (réunion):
Soit E et F deux ensembles.
On appelle *réunion* de E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à E, soit à F.
On note cet ensemble $E \cup F$.

Remarque:
On lit "E union F".

Exemples:
Soit A = {a ; c ; e}, B = {a ; b ; c}et C = {a ; d ; f}

- $A \cup B =$
- $A \cup C =$
- $B \cup C =$
- $C \cup C =$

Remarque:
Chaque élément ne peut figurer qu'une seule fois dans un ensemble.
Ainsi {a ; a ; b ; c ; d ; d} = {a ; b ; c ; d}.

EXERCICES

Exercice 1

Écrire les ensembles suivants en extension:

a) A = {x | x est un nombre entier impair entre 1 et 15}
b) B = {x | x est un jour de la semaine comportant un a}
c) C = {x | x est un nombre entier et $2 < x < 8$}

Exercice 2

Écrire les ensembles suivants en compréhension:

a) A = {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10}
b) B = {22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27}
c) C = {a ; e ; i ; o ; u ; y}

Exercice 3

Soit E = {Anne ; Bernard ; Claude ; Daniel ; Émile ; Fernand ; Gaston}

Écrire les ensembles suivants en extension:

a) A = {$x \in E$ | x comporte six lettres}
b) B = {$x \in E$ | x se termine par un e}
c) C = {$x \in E$ | x comporte un nombre impair de lettres}
d) D = {$x \in E$ | x commence par un l}

Exercice 4

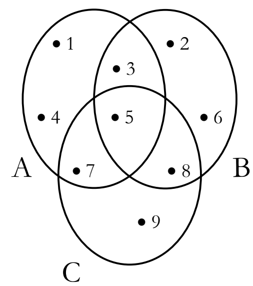
Soient les ensembles suivants:
$A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$, $B = \{1 ; 3 ; 5 ; 6\}$, $C = \{2 ; 3 ; 4 ; 7\}$, $D = \{1\}$

Recopier et compléter par le symbole qui convient: $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a) 1 A	b) 7 B	c) 5 B	d) {3} C
e) B A	f) D C	g) 4 C	h) {1} D

Exercice 5

Voici un diagramme de Venn:



1° Recopier et compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

a) 5 A	b) {6} A	c) $\varnothing$ B	d) 2 B

2° Écrire en extension les ensembles A, B et C.

Exercice 6

Soient les ensembles suivants:
$A = \{1;3;5;7;9\}$, $B = \{0;2;4;6;8\}$, $C = \{2;3;4\}$, $D = \{1;3;7;8\}$
Déterminer:

a) $A \cup C$	b) $A \cap B$	c) $C \cap D$	d) $C \cup D$

Exercice 7

Soient les ensembles suivants:
$A = \{1;2;3;5;8\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ est pair et } x < 11\}$

a) Déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$.
b) Faire le diagramme de Venn.

Exercice 8

Soient les ensembles suivants:

$A = \{2;3;5;7;11;13\}$, $B = \{3;6;9;12;15\}$ et $C = \{2;3;8;9;13;15\}$

a) Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$.
b) Faire le diagramme de Venn.

Exercice 9

Soit les ensembles suivants:

$E = \{$Gaston ; Paul ; Jean ; Pierre ; Jeanne ; Guy ; Fernand ; Georges$\}$
$A = \{x \in E \mid x$ commence par la lettre G$\}$
$B = \{x \in E \mid x$ contient un a$\}$
$C = \{x \in E \mid x$ comporte six lettres$\}$

a) Écrire en extension les ensembles A, B et C.
b) Faire le diagramme de Venn représentant les trois ensembles A, B et C.

Exercice 10

Soit A l'ensemble des personnes présentes dans la salle de classe aujourd'hui.

Soient de plus les ensembles suivants:
$L = \{x \in A \mid x \text{ porte des lunettes}\}$
$B = \{x \in A \mid x \text{ a des cheveux blonds}\}$
$J = \{x \in A \mid x \text{ porte des jeans}\}$

Faire le diagramme de Venn correspondant.

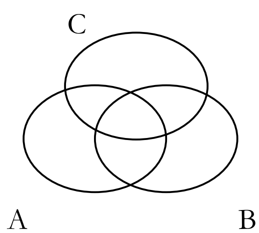
Exercice 11

Recopier et compléter:

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^* =$ b) $\mathbb{N} \cap \varnothing =$ c) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* =$ d) $\mathbb{N}^* \cup \{0\} =$

Exercice 12

Recopier la figure ci-dessous quatre fois et:



a) sur la première, sachant que $A \subset B$, colorier la région qui est sûrement vide.
b) sur la seconde, sachant que $A \cup C = C$, colorier la région qui est sûrement vide.
c) sur la troisième, sachant que $C \cap B = B$, colorier la région qui est sûrement vide.
d) sur la quatrième, sachant que $A \cap B = \varnothing$, colorier la région qui est sûrement vide.

Exercice 13

Soit A et B deux ensembles.
Écrire en compréhension les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$.

Exercice 14

Soit les ensembles suivants:
$A = \{a ; b ; f ; k ; l ; n ; p\}$, $B = \{b ; c ; d ; e ; f\}$, $C = \{a ; b\}$, $D = \{d ; e ; f ; g\}$ et $E = \{h ; i ; j ; m ; o\}$

a) Recopier et compléter par le symbole qui convient: $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

$a \quad A$	$\{a\} \quad C$	$C \quad A$	$\varnothing \quad E$	$\{b ; f ; h\} \quad A$
$D \quad B$	$n \quad E$	$\{n\} \quad A$	$D \quad D$	$\{c ; d ; f\} \quad B$

b) Déterminer les ensembles suivants:

$A \cap B$	$B \cap D$	$C \cap E$	$A \cap D$	$B \cap C$
$A \cup B$	$A \cup C$	$A \cup B \cup C \cup D \cup E$		