CHAPITRE III:

LES FRACTIONS

1.DEFINITIONS ET VOCABULAIRE

1.1.Fractions

numérateur (indique le nombre)

⇩

fraction $\left\{ \dfrac{a}{b} \right.$

⇧

dénominateur (donne le nom à la fraction)

Le numérateur et le dénominateur sont aussi appelés les *termes* de la fraction.

Remarques :

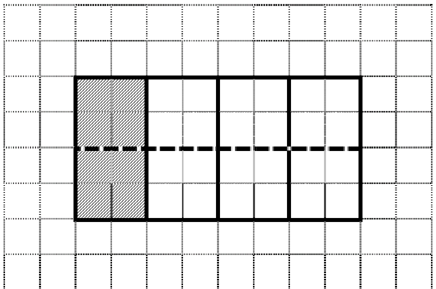
- $\dfrac{a}{b}$ = a :b, donc b ≠ 0.
- On écrit toujours les fractions sous la forme $\dfrac{a}{b}$ et non pas a/b.
- On évite l'écriture « mixte »: ainsi pour $\dfrac{3}{2}$ on n'écrit pas $1\dfrac{1}{2}$.

Lecture d'une fraction :

- $\dfrac{3}{2}$: trois demis (trois deuxièmes, trois sur deux)
- $\dfrac{2}{3}$: deux tiers (deux troisièmes, deux sur trois)
- $\dfrac{7}{4}$:
- $\dfrac{3}{5}$:
- $\dfrac{9}{11}$:

1.2.Fractions équivalentes

Voici une partie du quadrillage qu'on trouve dans un cahier. On y a dessiné un rectangle composé de 4 rectangles de 2 cm sur 1 cm, qui sont divisés en deux parties égales. Une partie de ce rectangle est hachurée.



Compléter :

- des rectangles de 2 cm sur 1 cm est hachuré. Donc du grand rectangle est hachuré.
- des carrés de 1cm sur 1 cm sont hachurés. Donc du grand rectangle sont hachurés.
- Le grand rectangle se compose de carreaux du quadrillage dont sont hachurés.

Donc du grand rectangle sont hachurés.

Ces trois fractions représentent la même partie du rectangle donc = = .

On dit que ces trois fractions sont *équivalentes*.

Elles représentent toutes le même nombre .

Définition (fractions équivalentes) :
On dit que deux fractions sont *équivalentes* si elles représentent le même nombre.

1.3.Amplification

On a vu que : $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Pour passer de $\frac{1}{4}$ à $\frac{2}{8}$, on a le numérateur et le dénominateur par le même nombre .

Cette opération s'appelle *amplifier*[1] une fraction.

Retenons :

Pour *amplifier* une fraction, on *multiplie* son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier différent de 0.

Exemples :

- amplifier par 3 les fractions suivantes: $\frac{3}{5} =$ $\frac{2}{7} =$ $\frac{5}{23} =$
- amplifier par 7 les fractions suivantes: $\frac{2}{9} =$ $\frac{13}{6} =$ $\frac{4}{1} =$

[1] erweitern

1.4.Simplification

On a vu que : $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Pour passer de $\frac{8}{32}$ à $\frac{1}{4}$, on a le numérateur et le dénominateur par le même nombre .

Cette opération s'appelle *simplifier*[2] une fraction.

Retenons :

Pour *simplifier* une fraction, on *divise* son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier différent de 0.

Exemples :

- $\frac{12}{16} =$
- $\frac{28}{21} =$
- $\frac{18}{9} =$

1.5.Fractions irréductibles

Définition :
On appelle *fraction irréductible* une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

Exemples :
Rendre irréductibles les fractions suivantes :

- $\frac{10}{12} =$
- $\frac{7}{21} =$
- $\frac{222}{18} =$

Dans la suite, on mettra les résultats des calculs toujours sous la forme d'une fraction irréductible.

2.FRACTIONS ET NOMBRES DECIMAUX

2.1.Transformation de fractions en nombres décimaux

a) Les fractions dont le dénominateur est une puissance de 10 se transforment facilement.

Exemples :

- $\frac{1}{10} =$ donc :
- $\frac{2}{10} =$
- $\frac{7}{10} =$
- $\frac{19}{10} =$

- $\frac{1}{100} =$ donc :
- $\frac{7}{100} =$
- $\frac{37}{100} =$
- $\frac{217}{100} =$

- $\frac{1}{1000} =$ donc :
- $\frac{17}{1000} =$
- $\frac{319}{1000} =$
- $\frac{3919}{1000} =$

b) Parfois il faut d'abord amplifier ou simplifier une fraction pour avoir une puissance de 10 au dénominateur.

Exemples :

- $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$
- $\frac{512}{400} = \frac{128 \cdot 4}{100 \cdot 4} = \frac{128}{100} = 1{,}28$

---

[2] kürzen, vereinfachen

- $\frac{3}{25} =$
- $\frac{3}{125} =$
- $\frac{7}{20} =$
- $\frac{8}{20} =$

c) On peut aussi effectuer la division indiquée par la barre de fraction.

Exemples :

- $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$
- $\frac{3}{8} =$

Ces deux nombres[3] ont un nombre limité[4] de chiffres derrière la virgule. On dit qu'ils ont un *code décimal limité*.

- $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}3333333\ldots$

Ce nombre a un nombre infini de chiffres derrière la virgule. Le chiffre 3 est répéte sans cesse. On dit que 3 est la période. Ce nombre a donc un *code décimal illimité et périodique*.

Notation :

Au lieu d'écrire 0,3333333…, on écrit $0{,}\overline{3}$. On lit : « zéro virgule trois barre ».
Le(s) chiffre(s) sous la barre représente(nt) la période.

Exemples :

- $\frac{5}{6} =$
- $\frac{7}{11} =$
- $\frac{5}{7} =$

Attention :

$0{,}\overline{3} \neq 0{,}3$ car $0{,}\overline{3} = 0{,}3333333\ldots = \frac{1}{3}$

et $0{,}3 = \frac{3}{10}$.

Exercice :

Transformer les fractions suivantes en nombres décimaux :

- $\frac{1}{2} =$
- $\frac{1}{3} =$
- $\frac{1}{4} =$
- $\frac{1}{5} =$
- $\frac{1}{8} =$
- $\frac{1}{10} =$
- $\frac{1}{20} =$
- $\frac{1}{25} =$
- $\frac{1}{50} =$
- $\frac{1}{100} =$
- $\frac{1}{1000} =$
- $\frac{1}{10000} =$

Désormais, ces résultats sont à connaître par cœur !!!

---

[3] diese beiden *Zahlen*
[4] eine beschränkte *Anzahl*

2.2.Transformation de nombres décimaux en fractions

Les nombres à code décimal limité se transforment en une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Ensuite, on pourra éventuellement simplifier cette fraction.

Exemples :

- $0{,}1 = \frac{1}{10}$
- $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$
- $0{,}01 =$
- $0{,}13 =$
- $3{,}12 =$
- $0{,}001 =$
- $0{,}302 =$
- $2{,}204 =$

La transformation en fractions de nombres à code décimal illimité ne figure pas au programme de la classe de 7ST.

2.3.Comparaison de fractions

Pour comparer deux fractions…

a) …on les transforme en nombres décimaux.
ou :
b) …on les met[5] au même dénominateur et on compare les numérateurs

Exemples :

- Comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

a) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ et $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Donc $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

ou : b) $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Donc $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

On choisit toujours la méthode qui convient le mieux.

- Comparer $\frac{5}{12}$ et $\frac{2}{3}$.

- Comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{5}$.

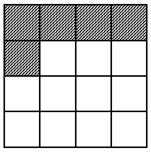
- Classer selon l'ordre croissant[6] : $\frac{3}{4};\frac{2}{9};\frac{5}{12};\frac{2}{3};\frac{5}{6}$ et $\frac{17}{36}$.

[5] en maths on dit aussi: on les *réduit* au même dénominateur
[6] ordre croissant: du plus petit au plus grand (ordre décroissant: du plus grand au plus petit)

3.ADDITION ET SOUSTRACTION

3.1.Fractions ayant le même dénominateur

Expérience



- Quelle fraction représente la partie hachurée ?
- Hachurer en plus $\frac{7}{16}$ du rectangle.
- Quelle fraction est alors hachurée ?
- Quelle addition a été illustrée par cette expérience ?

Calculer de même :

- $\frac{5}{12}+\frac{3}{12}=$
- $\frac{11}{17}-\frac{3}{17}=$

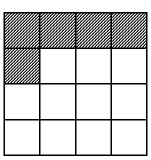
Règle :
Pour additionner (ou soustraire) des fractions à même dénominateur, on garde le dénominateur et on additionne les numérateurs.

Exemples :

- $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=$
- $\frac{9}{16}+\frac{3}{16}=$
- $\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{7}{3}=$
- $\frac{8}{7}-\frac{5}{7}+\frac{4}{7}=$

3.2.Fractions ayant des dénominateurs différents

Revoici le rectangle dont $\frac{5}{16}$ sont hachurés.



- Hachurer en plus $\frac{1}{4}$ de ce rectangle.
- Combien de carrés avez-vous hachuré ?
- Que vaut $\frac{5}{16}+\frac{1}{4}$?
- Quelle autre fraction plus utile au calcul de $\frac{5}{16}+\frac{1}{4}$ représente $\frac{1}{4}$?
- Que faut-il faire avant d'additionner deux fractions à dénominateurs différents ?

Règle :
Pour additionner (ou soustraire) des fractions à dénominateurs différents, on les réduit d'abord au même dénominateur. Puis on garde le dénominateur et on additionne (ou soustrait) les numérateurs.

Le dénominateur auquel on réduit toutes les fractions est appelé *dénominateur commun*[7].

Exemples :

- $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$
- $\frac{11}{12}-\frac{1}{8}=$
- $\frac{29}{21}-\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{3}\right)=$

4.MULTIPLICATION

4.1.Expérience

a) ➢ Que vaut la moitié de 6 ?

➢ Quelle fraction représente la moitié ?

➢ Quelle opération faut-il effectuer avec 6 et cette fraction pour obtenir le résultat ?

Donc : pour calculer   de 6, on calcule :   .

b) De même :

➢ pour calculer $\frac{3}{4}$ de 36, on calcule   .

➢ pour calculer $\frac{3}{7}$ de 21, on calcule   .

➢ pour calculer $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{3}$, on calcule   .

c) Au lieu de calculer $3 \cdot \frac{1}{2}$, on peut calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2}=\frac{3}{2}$

Calculer de même :

➢ $5 \cdot \frac{3}{7}=$

➢ $6 \cdot \frac{4}{5}=$

Donc :

Pour multiplier une fraction par un nombre, on multiplie le numérateur de la fraction par ce nombre.

d) $\frac{2}{3}$ d'une classe de 21 élèves sont des filles et $\frac{4}{7}$ des filles ont 12 ans.
Quelle fraction de filles de 12 ans y a-t-il dans cette classe ?

[7] gemeinsamer Nenner

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

- Colorier les filles en rouge et les garçons en bleu.
- Souligner les filles qui ont 12 ans.

Nombre de filles de 12 ans : sur 21.

Donc $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$.

4.2.Règle

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Ainsi : $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$ et $\boxed{a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{1 \cdot d} = \frac{a \cdot c}{d}}$

4.3.Exemples

- $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} =$
- $\frac{4}{3} \cdot \frac{13}{7} =$
- $\frac{12}{7} \cdot \frac{21}{24} =$

Le dernier exemple nous a montré qu'il vaut mieux simplifier dès que possible.
Attention : on ne simplifie que si on n'a qu'une seule fraction !!!

Refaisons cet exemple :
- $\frac{12}{7} \cdot \frac{21}{24} =$

- $\frac{39}{17} \cdot \frac{51}{13} =$
- $\frac{63}{35} \cdot \frac{4}{36} =$
- $4 \cdot \frac{3}{7} =$
- $\frac{2}{5} \cdot 7 =$
- $\frac{3}{4} \cdot 8 =$
- $\frac{36}{14} \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{21}{33} =$

4.4.Inverse d'un nombre

Exercice

Par quoi faut-il multiplier les nombres suivants pour trouver 1 comme résultat ?

- 2 : par
- 4 : par
- $\frac{1}{5}$: par
- $\frac{1}{10}$: par

Le produit d'un nombre par son inverse est égal à 1.

Donc, l'inverse de 2 est et l'inverse de 4 est .

En général :

Si $a \neq 0$: l'inverse de a est $\frac{1}{a}$.

De même, l'inverse de $\frac{1}{5}$ est et l'inverse de $\frac{1}{10}$ est .

Retenons :

Si $a \neq 0$: l'inverse de $\frac{1}{a}$ est a.

- $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} =$. Donc l'inverse de $\frac{4}{3}$ est .
- $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} =$. Donc l'inverse de $\frac{2}{7}$ est .

En général :

Si $a \neq 0$ et si $b \neq 0$: l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

5.DIVISION

5.1.Expérience

$12 : 2 = 6$

$12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow$ Donc, au lieu de diviser par 2, on peut multiplier par $\frac{1}{2}$ (qui est l'inverse de 2).

Retenons :

si $b \neq 0$, $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Régle :

Pour diviser par un nombre b, on multiplie par son inverse.

Question :

Est-ce que cela reste vrai si l'on divise par une fraction ?

- $12 : \frac{3}{4} = 12 : 0{,}75 = 16$
- $12 \cdot$

Donc : $12 : \frac{3}{4} = 16 \cdot$

- $\frac{12}{5} : \frac{3}{10} =$

Donc :

-

Réponse :

5.2. Règle

Pour diviser par une fraction ou un nombre, on multiplie par son inverse.

si a, b, c, d $\neq 0$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ et $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c}$

5.3. Exemples

- $\frac{18}{21} : \frac{12}{14} =$
- $\frac{28}{15} : \frac{21}{55} =$
- $\frac{36}{15} : \frac{18}{45} =$

Exercice :

Calculer :

a) $\left(3 + \frac{9}{20}\right) + \left(2 + \frac{7}{5}\right) + \frac{3}{10} =$

b) $\left(2 + \frac{5}{12}\right) + \frac{1}{3} + \left(4 + \frac{1}{4}\right) =$

c) $\frac{9}{4} - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) =$

d) $\left(2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) =$

Pour les champions :

e) $\dfrac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}} =$

f) $\dfrac{\frac{16}{49} : \frac{8}{7} + \frac{5}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{\frac{21}{10}}{\frac{63}{4}}} =$

Pour les vrais champions:

g) $\dfrac{3 \cdot \left(\frac{7}{16} + \frac{2}{8}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{56}} \cdot \dfrac{\frac{13}{7} \cdot \frac{14}{169} + \frac{22}{26}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}}} + \dfrac{2 - \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{4}} =$

h) $\dfrac{\dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{7} + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{12}{17}}{\frac{3}{2} - \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{30}\right)}}{\dfrac{\left(\frac{1}{9} + \frac{7}{18}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{3}{7} - \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} \cdot 3}} =$