CHAPITRE VI:

GEOMETRIE

1.LIGNES

1.1. Vocabulaire et notations

a) Point (Punkt)

Un *point* est noté par une lettre minuscule.

b) Ligne (Linie)

Une *ligne* est un ensemble infini de points. Elle a une longueur infinie.
On note une ligne avec une lettre majuscule.

Comme une ligne est un ensemble de points, on peut utiliser les notations des ensembles.

c) Droite (Gerade)

Une ligne droite est tout simplement appelée *droite*.
Une droite a une longueur infinie (donc on n'en dessine qu'une partie).

On peut noter les droites de deux manières :

- avec une majuscule, puisque c'est une ligne : la droite D

- avec deux lettres minuscules, qui représentent des points de la droite : la droite mn

d) Segment (Strecke)

Un *segment* est une partie d'une droite.
Il a une longueur finie, mais il contient une infinité de points.

On note : [ab]

a et b sont les *extrémités* du segment.

e) Demi-droite

Une *demi-droite* est une ligne qui a une origine (un début), mais pas d'extrémité.

On note : [ab

f) Cercle (Kreis)

Soit o un point.
Le *cercle* C de *centre* o et de *rayon* R est la ligne qui contient tous les points qui sont à une distance R de o.

g) Ligne polygonale[1] fermée

Notation : abcdef (attention à l'ordre !!!)

1.2. Position relative de deux droites

a) Droites sécantes[2]

Deux droites qui se coupent sont appelées *sécantes*.

b) Droites perpendiculaires

Deux droites qui se coupent à angle droit sont *perpendiculaires*.

On note : C ⊥ D

Remarque :

Deux droites perpendiculaires sont aussi sécantes.

---

[1] polygonale: qui a plusieurs angles (du grec *polus*: plusieurs, *gonos*: angle)
[2] sécantes: qui se coupent (du latin *secare*: couper)

c) Droites parallèles

Deux droites qui n'ont pas de point commun sont dites *parallèles*.

On note : C ∥ D

d) Droites confondues

Deux droites qui ont au moins 2 points en commun sont dites *confondues*.

On note : C = D

1.3. Axe de symétrie

Si, en effectuant un pliage, la moitié d'une ligne se superpose à l'autre, la ligne possède *un axe de symétrie*.

1.4. Mesurage

a) Unités de longueur

L'unité de longueur principalement utilisée est le *mètre* : 1 m

Multiples :

kilomètre	1 km = 1000 m
hectomètre	1 hm = 100 m
décamètre	1 dam = 10 m
mètre	1 m
décimètre	1 dm = 0,1 m
centimètre	1 cm = 0,01 m
millimètre	1 mm = 0,001 m
micromètre	1 µm = 0,000001 m

b) Mesure d'un segment

La *mesure* d'un segment est la *longueur* de ce segment.

Elle est notée $\overline{ab}$

c) Distances

- La *distance entre deux points* a et b est la mesure du segment [ab].

On note : $\delta(a;b)$

- La *distance d'un point* b *à une droite* D est la mesure du segment [bc] tel que $c \in D$ et $[bc] \perp D$.

On note : $\delta(b;D)$

La *distance entre deux droites* PARALLÈLES L et M est la mesure du segment [ef] tel que $e \in L$, $f \in M$ et $[ef] \perp L$ et $[ef] \perp M$.

On note : $\delta(L;M)$

d) Médiatrice d'un segment

Soit un segment [ab] tel que $\overline{ab} = 4$ cm.

Construire les points c et d, à une distance de 3 cm de a et de b.
e et f, à une distance de 4 cm de a et de b.
g et h, à une distance de 5 cm de a et de b.

Que constate-t-on ?

Cette droite est appelée médiatrice du segment [ab]. On la note méd[ab].

Définition (médiatrice)

On appelle *médiatrice du segment* [ab] et on note méd[ab], la droite perpendiculaire à [ab] et passant par le milieu de [ab].

Remarque

Tous les points de méd[ab] sont équidistants[3] de a et de b.

Construction géométrique de la médiatrice

① Tracer deux arcs de cercle de même rayon et de centre a resp. b. Ce rayon doit être plus grand que la moitié de la mesure de [ab]

② Relier les points d'intersection de ces arcs.

2.ANGLES

2.1.Définition et notation

Un *angle* est la partie du plan limitée par deux demi-droites de même origine.

Le *sommet* de l'angle A est le point a.
Les *côtés* de l'angle A sont les demi-droites [ab et [ac.

Notations : - par une lettre majuscule : A

- par trois lettres minuscules : b$\overset{\alpha}{a}$c

- par une lettre grecque minuscule : α, β, γ, δ...

[3] équidistants: à la même distance

2.2.Positions relatives de deux angles

a) Angles disjoints

Deux angles sont *disjoints* si leur intersection est vide.

b) Angles adjacents (Nebenwinkel)

Deux angles sont *adjacents* (anliegend) si leur intersection est une demi-droite et s'ils ont même sommet.

c) Angles opposés par le sommet

Deux angles sont *opposés par le sommet* si les côtés de l'un sont le prolongement de ceux de l'autre.

2.3.Mesure d'un angle

a) Unité

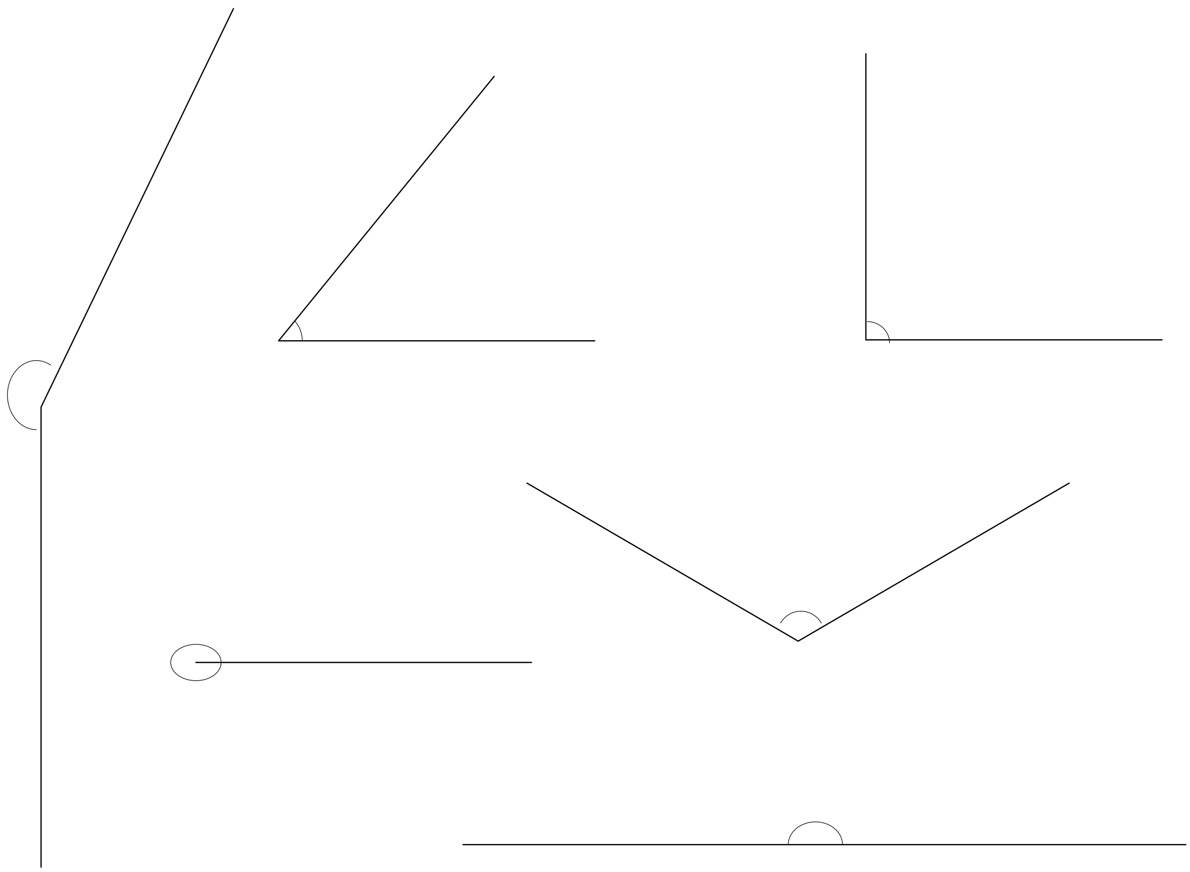
L'unité de mesure utilisée est le *degré* : 1°

b) Instrument de mesure

Pour mesurer les angles, on utilise un *rapporteur* (Winkelmesser).

c) Noms

- angle *nul* : angle de mesure 0°
- angle *aigu* : angle de mesure entre 0° et 90°
- angle *droit* : angle de mesure 90°
- angle *obtus* : angle de mesure entre 90° et 180°
- angle *plat* : angle de mesure 180°
- angle *rentrant* : angle de mesure entre 180° et 360°
- angle *plein* : angle de mesure 360°



2.4.Bissectrice d'un angle

Définition (bissectrice)

On appelle *bissectrice* d'un angle, la droite qui partage cet angle en deux parties égales.

Construction géométrique de la bissectrice

Soit un angle de sommet a.

① Tracer un arc de cercle de centre a. Cet arc coupe les côtés de l'angle en b et c.

② Tracer deux arcs de cercle de même rayon de centres b et c. Ces arcs se coupent en d.

③ La droite ad est la bissectrice.

3.SURFACES

3.1.Définitions

Une *surface* est une partie du plan délimitée par une ligne fermée.

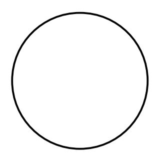
Une surface est appelée *surface polygonale*, si sa limite est une ligne polygonale fermée.

Exemples de surfaces polygonales :

nombre de côtés	nom	traduction
③	**tri**angle	**Drei**eck
④	**quadri**latère	**Vier**eck
⑤	**penta**gone	**Fünf**eck
⑥	**hexa**gone	**Sechs**eck
⑦	**hepta**gone	**Sieben**eck
⑧	**octo**gone	**Acht**eck
⑨	**ennéa**gone	**Neun**eck
⑩	**déca**gone	**Zehn**eck

Ces noms désignent à la fois :
- la ligne polygonale fermée
- la surface délimitée par cette ligne

Exemple de surface non polygonale :
le disque (die Scheibe), délimité par un cercle (Kreis)



3.2. Unités de longueur

L'unité de longueur principalement utilisée est le *mètre carré* : 1 m^2

Multiples :

kilomètre carré	1 km^2 = 1000000 m^2
hectomètre carré (ou : hectare)	1 hm^2 = 1 ha = 10000 m^2
décamètre carré (ou : are)	1 dam^2 = 1 a = 100 m^2
mètre carré	1 m^2
décimètre carré	1 dm^2 = 0,01 m^2
centimètre carré	1 cm^2 = 0,0001 m^2
millimètre carré	1 mm^2 = 0,000001 m^2

3.3. Triangles

a) Définition

Un *triangle* est une ligne polygonale fermée qui a trois côtés.

Les points a, b et c sont appelés *sommets*.
Les *côtés* sont [ab], [bc] et [ac].

Les *angles* sont $\widehat{abc}$, $\widehat{acb}$ et $\widehat{bac}$.

Remarque :

Les côtés et les angles sont aussi appelés les **éléments** du triangle.

b) Triangles particuliers

- Un *triangle isocèle* (gleichschenkliges Dreieck) est un triangle qui a au moins deux côtés isométriques (=de même longueur).

Figures :

triangle isocèle de sommet principal a

triangle isocèle de sommet principal b

Remarque :

Dans un triangle isocèle, les angles à la base ont même mesure.

- Un triangle équilatéral (gleichseitiges Dreieck) est un triangle qui a trois côtés isométriques.

Figure :

Remarque :

Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux.

- Un *triangle rectangle* (rechtwinkliges Dreieck) est un triangle qui a un angle droit.

Figure :

triangle rectangle en a

c) Construction d'un triangle

Pour construire un triangle, il suffit de connaître trois de ses éléments :

- 3 côtés
- 2 côtés, 1 angle
- 1 côté, 2 angles
- 3 angles

Exemples :

➢ Construire un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 6 cm.

➢ Construire un triangle dont deux côtés mesurent 3 et 5 cm et un angle 40°.

➢ Construire un triangle dont un côté mesure 5 cm et deux angles 30° et 70°.

Propriété :

Dans tout triangle, la somme des angles est égale à 180°.

Conséquence :

Si on connaît deux angles d'un triangle, on connaît aussi le troisième.

La construction d'un triangle dont on connaît les trois angles est donc la même que celle d'un triangle dont on connaît 2 angles.

d) Droites particulières d'un triangle

✖ Médiatrices

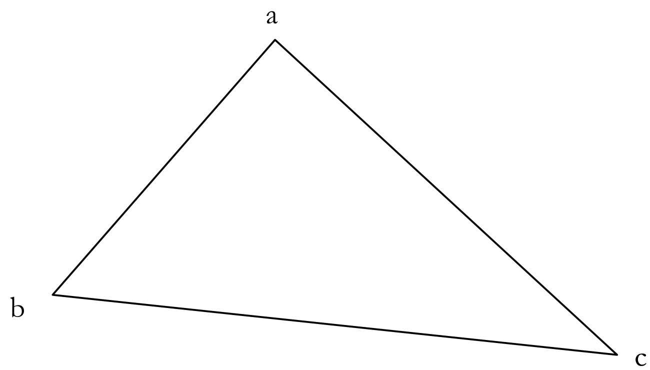
Définition (rappel) :

On appelle *médiatrice* d'un segment, la droite qui passe par le milieu d'un segment et qui est perpendiculaire à celui-ci.

Un triangle a trois côtés (qui sont des segments), donc on peut construire trois médiatrices.

Exercice :

Construire les trois médiatrices du triangle suivant :



Propriété :

Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point qui est appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.

✖ Bissectrices

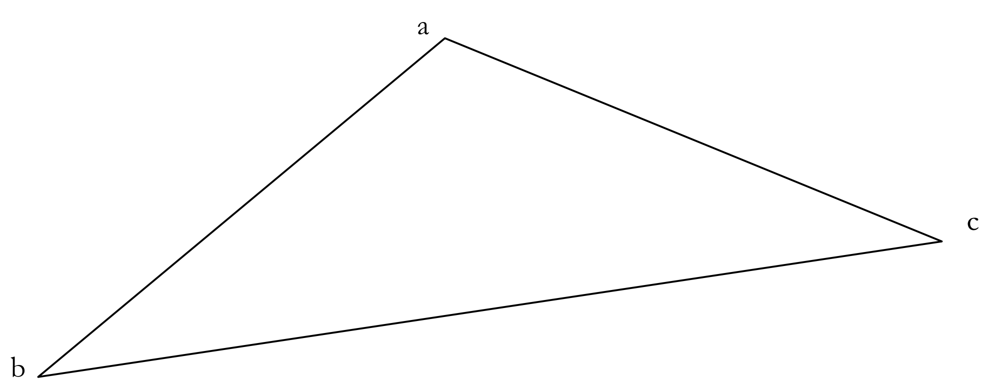
Définition (rappel) :

Un appelle *bissectrice* d'un angle, la droite qui partage cet angle en deux parties égales.

Un triangle a trois angles, donc on peut construire trois bissectrices.

Exercice :

Construire les trois bissectrices du triangle suivant :



Propriété :

Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un point qui est appelé *centre du cercle inscrit dans le triangle*.

Hauteurs d'un triangle

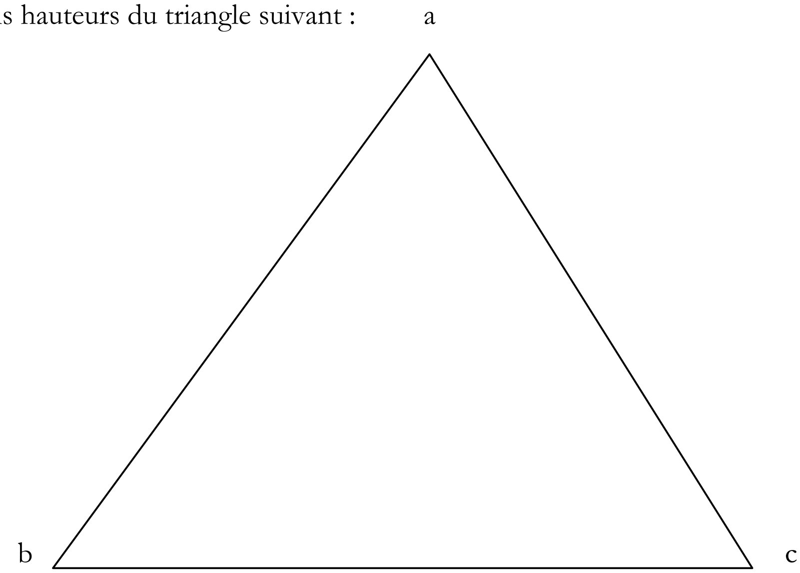
Définition :

On appelle *hauteur d'un triangle*, une droite qui passe par un sommet de ce triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Un triangle a trois sommets, donc on peut construire trois hauteurs.

Exercice :

Construire les trois hauteurs du triangle suivant :



Propriété :

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un point qui est appelé *orthocentre* de ce triangle.

Médianes d'un triangle

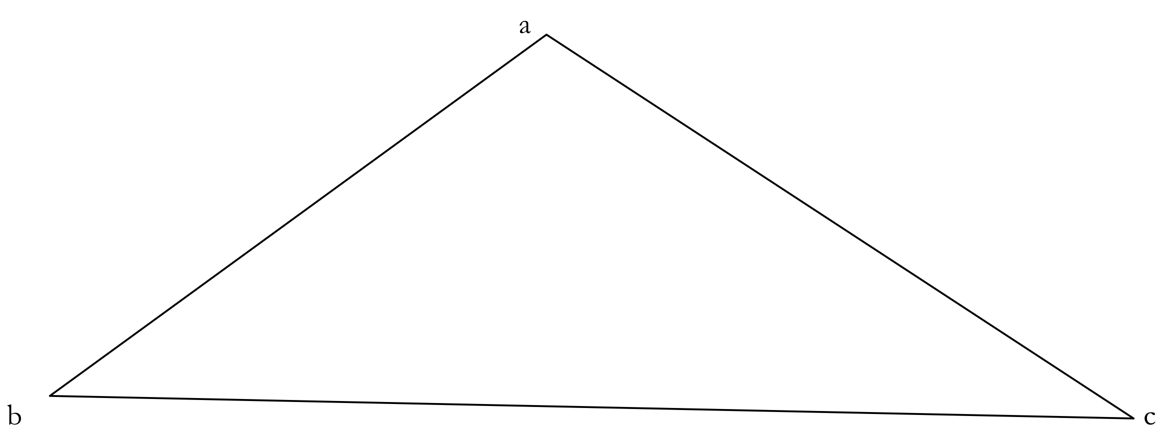
Définition :

On appelle *médiane d'un triangle*, un droite qui passe par un sommet de ce triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Un triangle a trois sommets, donc on peut construire trois médianes.

Exercice :

Construire les trois médianes du triangle suivant :



Propriété :

Les trois médianes d'un triangle se coupent en un point qui est appelé *centre de gravité* de ce triangle.

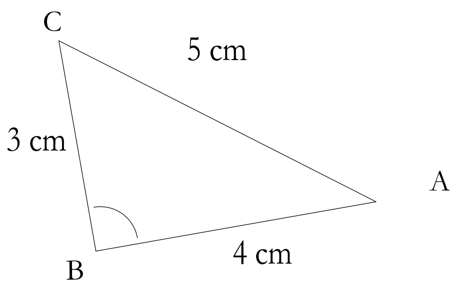
e) Aire et périmètre d'un triangle

$\boxed{P = a + b + c}$ (périmètre = 1[er] côté + 2[ième] côté + 3[ième] côté)

$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$ (aire = $\frac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}$)

Exemple :

(cas simple du triangle rectangle)



3.4.Quadrilatères

a) Définition

Un *quadrilatère* est une ligne polygonale fermée qui a quatre côtés.

Les points a, b, c et d sont les *sommets*.

Des *côtés opposés* sont des côtés qui n'ont pas d'extrémités communes :
[ab] et [cd] sont des côtés opposés
[bc] et [ad] sont des côtés opposés.

Une *diagonale* relie deux sommets non consécutifs (nicht aufeinanderfolgend) :
[ac] est une diagonale
[bd] est une diagonale.

b) Quadrilatères particuliers

× Un *trapèze* est un quadrilatère qui a au moins une paire de côtés parallèles.

Figure :

[ab] ∥ [cd]

× Un *parallélogramme* est un quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles.

Figure :

[ab] ∥ [cd] et [ad] ∥ [bc]

Propriétés : (barrer celles qui ne conviennent pas)

P_1	les côtés opposés ont même longueur
P_2	les angles opposés ont même mesure
P_3	les diagonales se coupent en leur milieu
P_4	les diagonales sont perpendiculaires
P_5	les diagonales ont même longueur

Exercice : vrai ou faux ?

	vrai	faux
un parallélogramme est toujours un trapèze		
un trapèze est toujours un parallélogramme		

× Un *losange* est un quadrilatère qui a quatre côtés isométriques.

Figure :

$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{da}$

Propriétés : (barrer celles qui ne conviennent pas)

P_1	les côtés opposés ont même longueur
P_2	les angles opposés ont même mesure
P_3	les diagonales se coupent en leur milieu
P_4	les diagonales sont perpendiculaires
P_5	les diagonales ont même longueur

Exercice : vrai ou faux ?

	vrai	faux
un losange est toujours un trapèze		
un trapèze est toujours un losange		
un losange est toujours un parallélogramme		

× Un *rectangle* est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Figure :

$\widehat{abc} = \widehat{bcd} = \widehat{cda} = \widehat{dab} = 90°$

Propriétés : (barrer celles qui ne conviennent pas)

P_1	les côtés opposés ont même longueur
P_2	les angles opposés ont même mesure
P_3	les diagonales se coupent en leur milieu
P_4	les diagonales sont perpendiculaires
P_5	les diagonales ont même longueur

Exercice : vrai ou faux ?

	vrai	faux
un rectangle est toujours un parallélogramme		
un rectangle est toujours un losange		
un losange est toujours un rectangle		
un rectangle est toujours un trapèze		

× Un *carré* est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés isométriques.

Figure :

$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{da}$ et $\widehat{abc} = \widehat{bcd} = \widehat{cda} = \widehat{dab} = 90°$

Propriétés : (barrer celles qui ne conviennent pas)

P_1	les côtés opposés ont même longueur
P_2	les angles opposés ont même mesure
P_3	les diagonales se coupent en leur milieu
P_4	les diagonales sont perpendiculaires
P_5	les diagonales ont même longueur

Exercice : vrai ou faux ?

	vrai	faux
un rectangle est toujours un carré		
un carré est toujours un losange		
un carré est toujours un rectangle		
un carré est toujours un parallélogramme		
un losange est toujours un carré		

Propriété de tous les quadrilatères :

Dans tout quadrilatère, la somme des angles est égale à 360°.

c) Aires et périmètres

Carré

c : côté

$\boxed{P = 4\cdot c}$ $\boxed{A = c^2}$

Rectangle

L : longueur, l : largeur

$\boxed{P = 2\cdot(L + l)}$ $\boxed{A = L\cdot l}$

Parallélogramme

b : base, c : côté, h : hauteur

$\boxed{P = 2\cdot(b + c)}$ $\boxed{A = b\cdot h}$

Losange

D : grande diagonale, d : petite diagonale, c : côté

$\boxed{P = 4\cdot c}$ $\boxed{A = \dfrac{D\cdot d}{2}}$

Trapèze

B : grande base, b : petite base, h : hauteur, b_m : base moyenne

$$\boxed{A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{B+b}{2}\cdot h = b_m\cdot h}$$

3.5. Cercle et disque

a) Définitions :

- Le *cercle de centre o et de rayon r*, l'ensemble des points qui sont à une distance r de o.
- o est le *centre* du cercle.
- Un *rayon* est un segment qui relie le centre o à un point du cercle.
- Le *rayon* r est la mesure de ces segments.
- Une *corde* est un segment qui relie deux points du cercle.
- Un *diamètre* est une corde passant par le centre du cercle.
- Le *diamètre* d est la mesure de ces segments.
  Il est égal au double du rayon r.
- Un *arc* est une partie du cercle.
- Le *disque* est la surface limitée par le cercle.

b) Périmètre d'un disque (longueur d'un cercle)

Expérience :

Mesurer le diamètre et le périmètre d'objets ronds.
On mesurera la longueur de 10 tours de cercle pour éviter l'erreur.

objet	diamètre d	10 périmètres	périmètre P	P : d

Formule trouvée:

La vraie formule pour calculer le périmètre d'un disque est $\boxed{P = \pi \cdot d}$

π (on lit : « pi ») est égal à 3,1419265358979… (code décimal illimité)
Pour les calculs, on prendra 3,14.

Comme le diamètre d est égal au double du rayon r, on a aussi $\boxed{P = 2 \cdot \pi \cdot r}$

c) Aire d'un disque

Expérience :

On découpe un cercle en 4 parties, puis en 8 parties, en 16 parties… etc

On place les pièces obtenues de manière à obtenir une figure très proche d'une figure géométrique connue.

Quelle est la figure obtenue ?

Quelle sont les dimensions de cette figure ?

Comment calcule-t-on l'aire de cette figure ?

Formule trouvée :

Remarque :

Les figures illustrant cette expérience se trouvent à la page 271 du livre.