Transformations du plan

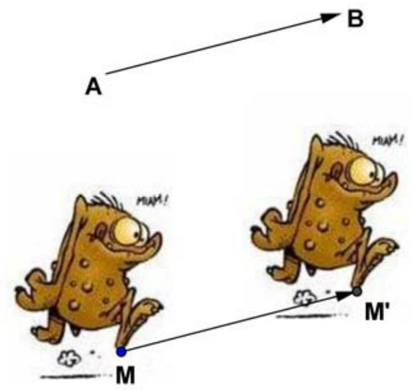
1

DÉFINITION (transformation du plan)

Une **transformation** du plan dans lui-même transforme tout point du plan en un autre point du plan.
Ainsi, à chaque point M du plan, on associe un autre point M’ du plan.
Le point M’ est appelé l’image du point M.

1. Translation (Verschiebung)

Sur la figure on peut voir deux images. On a fait glisser la première image comme l’indique la flèche qui va de A vers B.
Un tel glissement s’appelle une **translation.**
Pour caractériser une translation, il suffit donc de connaître deux points. Ces deux points sont appelé un couple de points (A,B).

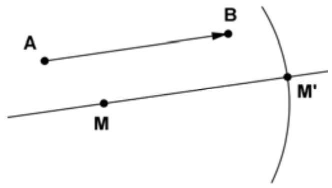


DÉFINITION (translation)

Une **translation de couple (A,B)** est la transformation du plan dans lui-même qui transforme chaque point M du plan en un point M’ du plan tel que les segments [AB] et [MM’] sont parallèles, ont même longueur et « vont dans le même sens ».

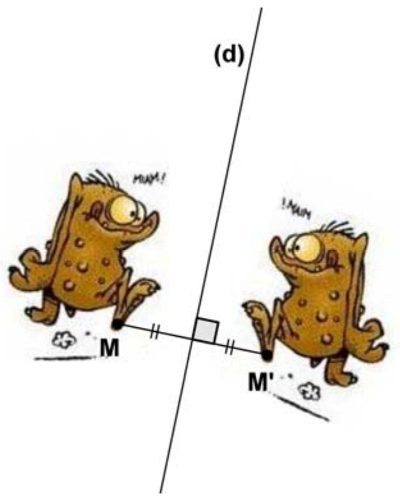
on note : $t_{(A,B)}(M) = M'$.

Programme de construction :
• Tracer la droite parallèle à (AB), passant par M.
• Tracer un arc de cercle de centre M et de rayon AB de façon à ce que cet arc de cercle coupe la droite en un point M’ qui va dans le sens de A vers B à partir de M.



2. Symétrie axiale (Spiegelung)

Sur la figure, on peut de nouveau voir deux figures. Si on pliait la feuille le long de la droite (d), le deux figures se superposeraient.
On dit que la deuxième figure est symétrique à la première figure par rapport à la droite (d). La droite (d) est aussi appelée **axe de symétrie**.

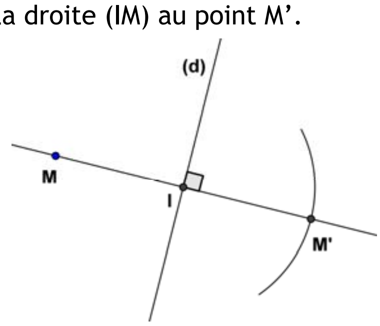


DÉFINITION (symétrie axiale)

Une **symétrie d’axe (d)** est la transformation du plan dans lui-même qui transforme chaque point M du plan en un point M’ du plan tel que [MM’] et (D) sont perpendiculaires et le milieu de [MM’] appartient à la droite (d).

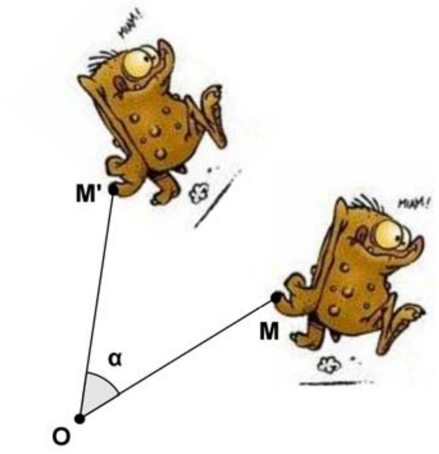
on note : $s_{(d)}(M) = M'$.

Programme de construction :
• Tracer la droite passant par M et perpendiculaire à (d).
Cette droite coupe (d) en un point I.
• Tracer un arc de cercle de centre I et de rayon IM.
Cet arc coupe la droite (IM) au point M’.



3. Rotation (Drehung)

Cette fois-ci on a obtenu la deuxième image en ayant fait tourner la première d'un certain angle autour du point O.
Le point O est appelée le **centre de rotation**.
L'angle α est l'angle de rotation. (ici : α = 50°)



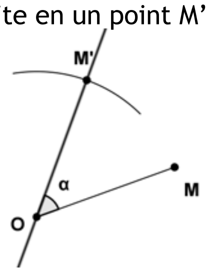
Attention :
Le sens positif pour les angles est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre !

DÉFINITION (rotation)

Une **rotation de centre O et d'angle α** est la transformation du plan dans lui-même qui transforme chaque point M du plan en un point M' du plan tel que OM=OM' et $\widehat{MOM'} = \alpha$.
on note : $r_{O,\alpha}(M) = M'$.

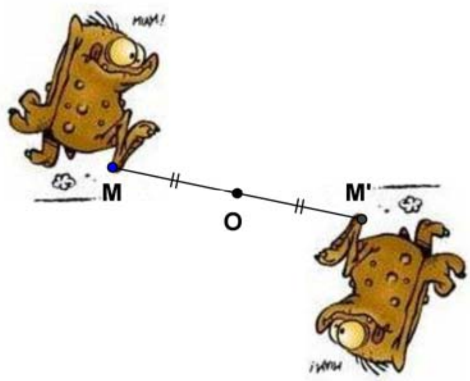
Programme de construction :
- Tracer le segment [OM].
- Tracer la droite passant par O et faisant un angle α avec le segment [OM].
- Tracer un arc de cercle de centre O et de rayon OM.

Cet arc coupe la droite en un point M' tel que $\widehat{MOM'} = \alpha$. (Attention au sens !!!)



4. Symétrie centrale (Punktsymmetrie)

Sur cette dernière figure on peut voir que la symétrie centrale est en fait une rotation d'un demi-tour (ou de 180°).
Le point O est appelé **le centre de symétrie**.

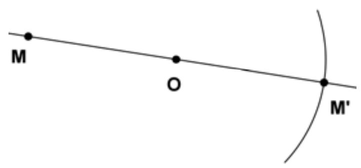


DÉFINITION (symétrie centrale)

Une **symétrie de centre O** est la transformation du plan dans lui-même qui transforme chaque point M du plan en un point M' du plan tel que O est le milieu de [MM']
on note : $s_O(M) = M'$.

Programme de construction :
- Tracer la droite (MO).
- Tracer un arc de cercle de centre O et de rayon OM.

Cet arc de cercle coupe la droite (MO) en M'.



Remarque :
Pour construire l'image d'un polygone (Vieleck), on construit d'abord les images de leurs sommets, puis on relie ces images.

5. Repère du plan (rappel)

Pour repérer les points dans le plan, on utilise un repère du plan : deux axes gradués se coupant en un point.
Si les axes ont la même graduation et sont perpendicaulaires, alors le repère est appelé **repère orthonormal**.

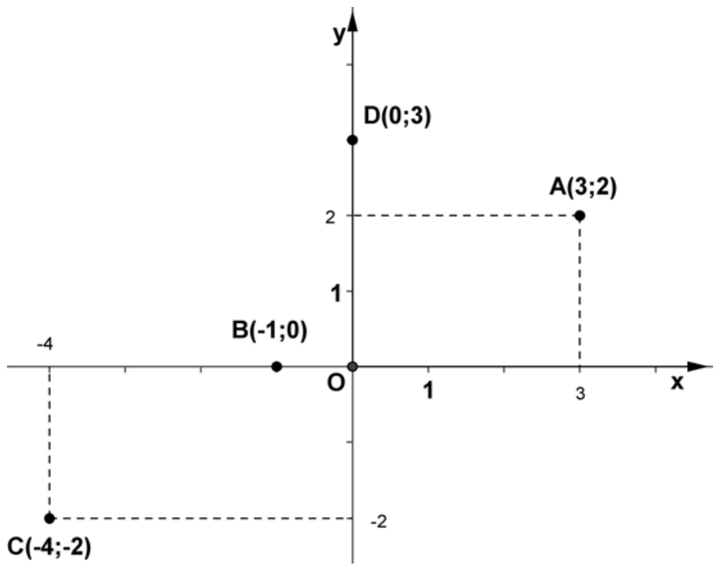
Vocabulaire :

L'axe (Ox) est l'**axe des abscisses**.
Les **abscisses** des points A, B, C et D sont 3, -1, -4 et 0.

L'axe (Oy) est l'**axe des ordonnées**.
Les **ordonnées** des points A, B, C et D sont 2, 0, -2 et 3.

Le point O est l'**origine** du repère.

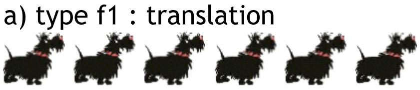
Les **coordonnées** de A sont (3;2).



6. Les frises

Une frise est une bande décorée par la répétition d'un motif. Ces frises peuvent être construites à l'aide des transformations du plan.
Il existe 7 types de frises différentes :

a) type f1 : translation



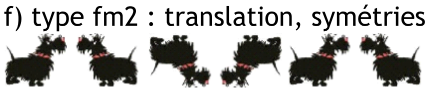
b) type f2 : translation et symétrie centrale

c) type fm1 : translation et symétrie d'axe vertical

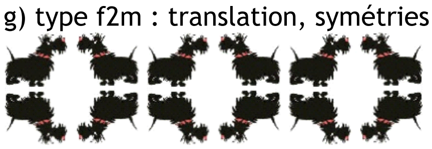
d) type f1m : translation et symétrie d'axe horizontal

e) type f1g : translation et symétrie glissée (translation et en même temps symétrie d'axe horizontal)

f) type fm2 : translation, symétries centrale, glissée et d'axe vertical



g) type f2m : translation, symétries centrale, glissée, d'axe vertical et d'axe horizontal



Il n'existe pas d'autre type de frise.