T2EE - 2. LIMITES

1. Exemple introductif: la fonction inverse

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.
$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
Regardons maintenant ce qui se passe "aux bornes du domaine", c'est-à-dire en $+\infty$, à droite et à gauche de 0 et en $-\infty$.

a) en $+\infty$

x	10	100	1000	10000	1000000
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{10}$ $=0,1$	$\frac{1}{100}$ $=0,01$	$\frac{1}{1000}$ $=0,001$	$\frac{1}{10000}$ $=0,0001$	$\frac{1}{1000000}$ $=0,000001$

On remarque que, si x se rapproche de $+\infty$, alors $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.

on écrit: $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0}$.

b) à droite de 0: en 0^+

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000001
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{0,1}$ $=10$	$\frac{1}{0,01}$ $=100$	$\frac{1}{0,001}$ $=1000$	$\frac{1}{0,0001}$ $=10000$	$\frac{1}{0,000001}$ $=1000000$

On remarque que, si x se rapproche de 0^+, alors $\frac{1}{x}$ se rapproche de $+\infty$.

on écrit: $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$.

c) à gauche de 0: en 0^-

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,000001
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{0,1}$ $=-10$	$-\frac{1}{0,01}$ $=-100$	$-\frac{1}{0,001}$ $=-1000$	$-\frac{1}{0,0001}$ $=-10000$	$-\frac{1}{0,000001}$ $=-1000000$

On remarque que, si x se rapproche de 0^-, alors $\frac{1}{x}$ se rapproche de $-\infty$.

on écrit: $\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}$.

d) en $-\infty$

x	-10	-100	-1000	-10000	-1000000
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{10}$ $=-0,1$	$-\frac{1}{100}$ $=-0,01$	$-\frac{1}{1000}$ $=-0,001$	$-\frac{1}{10000}$ $=-0,0001$	$-\frac{1}{1000000}$ $=-0,000001$

On remarque que, si x se rapproche de $-\infty$, alors $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.

on écrit: $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0}$.

On retiendra que: $\boxed{"\frac{1}{\infty} = 0" \text{ et } "\frac{1}{0} = \infty"}$.

2. Limite d'une fonction polynôme en ∞

Exemple 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{-5x}_{\to-\infty}-1\right)$$

On obtient $+\infty-\infty$: c'est une forme indéterminée. Il faut calculer la limite autrement.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-5x-1)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to0}\right)}_{\to1}=+\infty$$

Exemple 2

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x^3}_{-\infty}\underbrace{+4x^2}_{\to+\infty}\underbrace{-6x}_{\to+\infty}+7\right)$$

De nouveau, on obtient une forme indéterminée $-\infty+\infty+\infty$.

Donc: $$\lim_{x\to-\infty}(x^3+4x^2-6x+7)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x^3}_{\to-\infty}\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to0}-\underbrace{\frac{6}{x^2}}_{\to0}+\underbrace{\frac{7}{x^3}}_{\to0}\right)}_{\to1}=-\infty$$

Résultat:

> La limite d'une fonction polynôme en ∞ est celle du terme de plus haut degré. Cette limite vaut donc $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples:

★ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+3x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2+3x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

★ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

★ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-8x^2+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-8x^2+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

3. Limite d'une fonction rationnelle en ∞

Pour calculer la limite d'une fonction rationnelle en ∞, on procède de la même manière comme avec les foctions polynômes: au numérateur et au dénominateur.

Exemple:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-7}{x^2+2x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\overbrace{\left(1+\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to0}-\overbrace{\frac{7}{x^2}}^{\to0}\right)}^{\to1}}{x^2\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to0}-\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\to0}\right)}_{\to1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Résultat:

> Pour calculer la limite d'une fonction rationnelle en ∞, on ne garde que le terme de plus haut degré au numérateur (en haut) et au dénominateur (en bas).
>
> — si le degré du numérateur est plus grand, la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$.
>
> — si les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux, la limite est égale à un réel non nul.
>
> — si le degré du dénominateur est plus grand, la limite vaut 0.

Exemples:

$\star \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12x^2-13x-1}{3x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12x^2-13x-1}{3x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty$

$\star \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+10} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+10} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$

$\star \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6+2x}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+2x}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

Exercice 1

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ c) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ e) $f(x) = \dfrac{2x+7}{5-3x}$ g) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-1}{2x-3}$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ d) $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 1$ f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{5x^3-2x+4}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{2x^2-7x+1}$

4. Limite d'une fonction polynôme en un point a

Si f est une fonction polynôme, alors $D_f = \mathbb{R}$. Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple:

$\star \lim\limits_{x\to-2} (x^2+3x-1) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$

5. Limite d'une fonction rationnelle en un point a

Si $a \in D_f$, alors le résultat est le même qu'avec les fonctions polynômes: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple:

$\star \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{x-5} = \dfrac{2\cdot 2-1}{2-5} = \dfrac{3}{-3} = -1$

Si $a \notin D_f$, alors on calcule vers quelles valeurs tendent le numérateur et le dénominateur. (Normalement le dénominateur devrait tendre vers 0, puisque a n'est pas dans le domaine.)

Exemples:

$\star \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overbrace{-3x+4}^{\to -2}}{\underbrace{x^2-5x+6}_{\to 0}}$ $\qquad -3\cdot 2+4 = -2 \qquad 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$

Il faut maintenant se demander si le dénominateur tend vers 0^+ (dans ce cas la limite est $-\infty$) ou vers 0^- (dans ce cas, la limite est $+\infty$).
Pour ce faire, on fait une étude complète du signe du dénominateur.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \overset{\Delta=1}{\Leftrightarrow} x = 2$ ou $x = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dans ce tableau, on voit qu'à droite de 2, le dénominateur est positif et à gauche il est négatif.
Il faut donc distinguer les limites à droite et à gauche.

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\overbrace{3x+4}^{\to -2}}{\underbrace{x^2-5x+6}_{\to 0^+}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\overbrace{3x+4}^{\to -2}}{\underbrace{x^2-5x+6}_{\to 0^-}} = +\infty$

$\star \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overbrace{x^2-4x+3}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-3x+2}_{\to 0}}$ $\qquad 1^2-4\cdot 1+4=0 \qquad 1^2-3\cdot 1+2=0$

"$\dfrac{0}{0}$" est une forme indéterminée. Pour lever cette forme indéterminée, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur.

$x^2-4x+3=0 \overset{\Delta=4}{\Leftrightarrow} x=1$ ou $x=3$. Donc $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.
$x^2-3x+2=0 \overset{\Delta=1}{\Leftrightarrow} x=1$ ou $x=2$. Donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

Après cette factorisation, on peut simplifier:

Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overbrace{x-3}^{\to -2}}{\underbrace{x-2}_{\to -1}} = 2$

Résultat:

> Si f est une fonction rationnelle, il faut regarder si le nombre a est dans le domaine de f.
>
> a) Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
>
> b) Si $a \notin D_f$, alors le dénominateur s'annule si on remplace x par a. Deux cas peuvent se présenter:
>
> - Si le numérateur s'annule aussi, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur, ensuite simplifier.
> - Si le numérateur ne s'annule pas, il faut calculer la limite à gauche et à droite. On regarde ainsi si le dénominateur tend vers 0^+ ou vers 0^-. Pour le faire, on étudie le signe du dénominateur.

Exemples:

$\star \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-4}{3x+1} = \dfrac{2\cdot 2^2-4}{3\cdot 2+1} = \dfrac{8-4}{6+1} = \dfrac{4}{7}$

$\star \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overbrace{2x-4}^{\to -2}}{\underbrace{3x-3}_{\to 0}}$ $\qquad$ il faut calculer la limite à gauche et à droite

$3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$3x-3$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\overbrace{2x-4}^{\to -2}}{\underbrace{3x-3}_{\to 0^+}} = -\infty$ $\qquad$ et $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\overbrace{2x-4}^{\to -2}}{\underbrace{3x-3}_{\to 0^-}} = +\infty$

$\star \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\overbrace{x^2-x-6}^{\to 0}}{\underbrace{-x^2+3x+10}_{\to 0}}$ $\qquad$ forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$" $\to$ il faut factoriser.

$x^2-x-6=0 \overset{\Delta=25}{\Leftrightarrow} x=-2$ ou $x=3$ Donc $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

$-x^2+3x+10=0 \overset{\Delta=49}{\Leftrightarrow} x=-2$ ou $x=5$ Donc $-x^2+3x+10=-(x+2)(x-5)$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+20} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x-3)}{-(x+2)(x-5)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-3)}{-(x-5)} = \dfrac{-5}{-(-7)} = -\dfrac{5}{7}$

$\star \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\overbrace{x^2-x-6}^{\to 14}}{\underbrace{-x^2+3x+10}_{\to 0}}$ il faut calculer la limite à gauche et à droite

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\overbrace{x^2-x-6}^{\to 14}}{\underbrace{-x^2+3x+10}_{\to 0^+}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{\overbrace{x^2-x-6}^{\to 14}}{\underbrace{-x^2+3x+10}_{\to 0^-}} = -\infty$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x+1}{2x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-2x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-5}{x^2+x-2}$

6. Interprétation graphique des limites: les asymptotes

Une (droite) asymptote à la courbe représentative d'une fonction est une droite dont la courbe représentative se rapproche de plus en plus, sans la toucher. Il existe trois types d'asymptotes:

a) Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$, alors la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.

C'est le cas pour les fonctions rationnelles si le degré du dénominateur est plus grand ou égal à celui du numérateur.

Exemple:

$\star$ On a vu en 3. que $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+10} = -1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+10} = -1$

Donc la courbe de cette fonction admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote horizontale (fig. 1).

b) Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, alors la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Exemple:

$\star$ On a vu en 5. que $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+10} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^2-x-6}{-x^2+3x+10} = -\infty$.

Donc la courbe de cette fonction admet la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote verticale (fig.2).

c) Asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

(Dans les exercices, l'équation de l'asymptote oblique est toujours donnée.)

Exemple:

⋆ Montrer que la corbe de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 11}{x + 2}$ admet la droite d'équation $y = x - 7$ comme asymptote oblique.

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left[\frac{x^2 - 5x - 11}{x + 2} - (x - 7)\right] = \lim_{x \to \pm\infty}\frac{x^2 - 5x - 11 - (x - 7)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty}\frac{x^2 - 5x - 11 - (x^2 - 7x + 2x - 14)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty}\frac{x^2 - 5x - 11 - x^2 + 5x + 14}{x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty}\frac{3}{x + 2} = 0$$

Donc la courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $y = x - 7$ comme asymptote oblique (fig. 3).

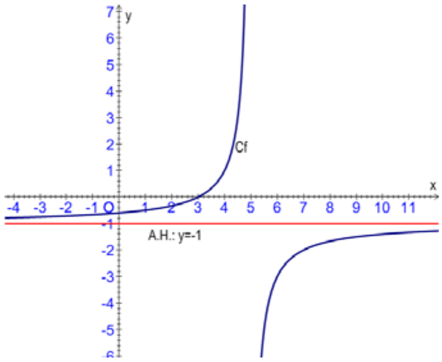

fig. 1

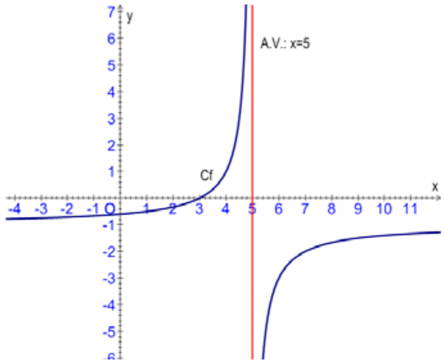

fig. 2

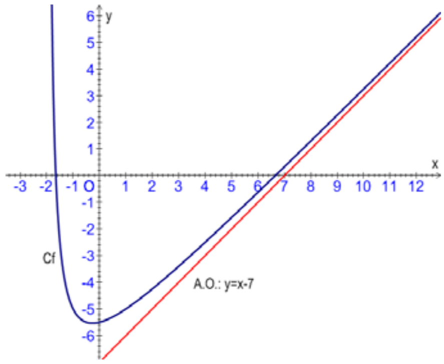

fig. 3

Exercice 3

Déterminer le domaine et les limites aux bornes du domaine des fonctions suivantes.
Donner, si possible, une interprétation graphique des résultats.

a) $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x + 7$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 120$

e) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x - 3}$

f) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{2x^2 - x}$

g) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{2 - 3x}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x + 6}$

i) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + 3x - 4}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 3}{x^2 + 4x + 5}$

k) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 36}{x^2 + 3x - 10}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - 4}$

m) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 3x - 10}$

n) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 14x + 20}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x + 2}$ et C_f sa courbe représentative.
Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5

Mêmes questions qu'à l'exercice 4 pour les fonctions et droites suivantes:

a) $f(x) = \dfrac{16x^2 + 8x + 3}{4x + 1}$ $\qquad y = 4x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad y = -x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ $\qquad y = 3x + 2$