T2EE - Corrigé II,1 du 17.02.2011

Exercice 1 (**2** + **3** + **3** + **5** + **5** + **8** = **26 points**)

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
$D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x+1}$
condition: $4x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{4}$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $f(x) = \sqrt{2x+5} + \dfrac{1}{7}$
condition: $2x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$
$D_f = \left[-\frac{5}{2};+\infty\right[$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$
condition: $x^2 - 7x + 10 \geq 0$
$x^2 - 7x + 10 = 0 \overset{\Delta=9}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{7+3}{2} = 5$ ou $x = \dfrac{7-3}{2} = 2$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = \left]-\infty;2\right] \cup \left[5;+\infty\right[$

e) $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 3\sqrt{5-3x}$
conditions: $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$
$5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$
donc $D_f = \left[-3;\frac{5}{3}\right]$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{3x+5}}$
condition: $\dfrac{x+1}{3x+5} \geq 0$
$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ / $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+1}{3x+5}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

donc $D_f = \left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[\cup \left[-1;+\infty\right[$

Exercice 2 (**18 points**)

$f(x) = \dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-3x-10}$

condition: $x^2-3x-10 \neq 0$

$x^2-3x-10 = 0 \overset{\Delta=49}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{3+7}{2} = 5$ ou $x = \dfrac{3-7}{2} = -2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;5\}$

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$ A.H.: $y = 2$

▸ $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\overbrace{2x^2-7x-15}^{\to 7}}{\underbrace{x^2-3x-10}_{\to 0}}$ il faut calculer la limite en -2^+ et -2^-

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{\overbrace{2x^2-7x-15}^{\to 7}}{\underbrace{x^2-3x-10}_{\to 0^+}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{\overbrace{2x^2-7x-15}^{\to 7}}{\underbrace{x^2-3x-10}_{\to 0^-}} = -\infty$ A.V.: $x = -2$

▸ $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\overbrace{2x^2-7x-15}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-3x-10}_{\to 0}}$ forme indéterminée, il faut factoriser

$2x^2-7x-15 = 0 \overset{\Delta=169}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{7+13}{4} = 5$ ou $x = \dfrac{7-13}{4} = -\frac{3}{2}$

donc: $2x^2-7x-15 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5) = (2x+3)(x-5)$

et: $x^2-3x-10 = (x+2)(x-5)$

donc $\lim\limits_{x\to5} f(x) = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{(2x+3)(x-5)}{(x+2)(x-5)} = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{(2x+3)}{(x+2)} = \dfrac{13}{7}$

Exercice 3 (**2** + **8** + **6** = **16 points**)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x^2+8x-32}{x+5}$.

a) condition: $x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

b) ▸ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

▸ $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{\overbrace{3x^2+8x-32}^{\to 3}}{\underbrace{x+5}_{\to 0}}$ il faut calculer la limite en -5^+ et -5^-

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-5^-} \dfrac{\overbrace{3x^2+8x-32}^{\to 3}}{\underbrace{x+5}_{\to 0^-}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{\overbrace{3x^2+8x-32}^{\to 3}}{\underbrace{x+5}_{\to 0^+}} = +\infty$ A.V.: $x = -5$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(3x-7)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{3x^2+8x-32}{x+5} - (3x-7)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+8x-32-(3x-7)(x+5)}{x+5}$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 8x - 32 - (3x^2 - 7x + 15x - 35)}{x + 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 8x - 32 - 3x^2 - 8x + 35}{x + 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x + 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x} =$$

Donc la droite d'équation $y = 3x - 7$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.