T2EE - Corrigé du devoir en classe de mathématiques III,2

Exercice 1

$f(x) = 4x^3 - 33x^2 + 30x + 50$

a) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

c) $(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 33 \cdot 2x + 30 = 12x^2 - 66x + 30$

d) $f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 66x + 30 = 0 \iff 2x^2 - 11x + 5 = 0 \overset{\Delta=81}{\iff} x = \frac{11+9}{4} = 5$ ou $x = \frac{11-9}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

tableau des variations:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{229}{4}$	↘	-125	↗	$+\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 33\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 30 \cdot \frac{1}{2} + 50 = \frac{229}{4}$ et $f(5) = 4 \cdot 5^3 - 33 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 50 = -125$

Exercice 2

I) $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2}$

a)cond.: $x^2 - x - 2 \neq 0 \overset{\Delta=9}{\iff} x \neq \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x \neq \dfrac{1-3}{2} = -1$ donc $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

b) • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ A.H.: $y = -1$

• $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\overbrace{-x^2 + x + 4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{\to 0}}$ il faut distinguer -1^+ et -1^-

x		$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$		

$\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\overbrace{-x^2 + x + 4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{\to 0^+}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{\overbrace{-x^2 + x + 4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{\to 0^-}} = -\infty$ A.V.: $x = -1$

• $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\overbrace{-x^2 + x + 4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{\to 0}}$ il faut distinguer 2^+ et 2^-

$\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{\overbrace{-x^2 + x + 4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{\to 0^-}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\overbrace{-x^2 + x + 4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{\to 0^+}} = +\infty$ A.V.: $x = 2$

c) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}) : f'(x) = \dfrac{(-2x + 1) \cdot (x^2 - x - 2) - (-x^2 + x + 4) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2}$

$= \dfrac{-2x^3 + 2x^2 + 4x + x^2 - x - 2 - (-2x^3 + x^2 + 2x^2 - x + 8x - 4)}{(x^2 - x - 2)^2} = \dfrac{-2x^3 + 3x^2 + 3x - 2 + 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4}{(x^2 - x - 2)^2}$

$$= \frac{-4x+2}{(x^2-x-2)^2}$$

d) $f'(x) = 0 \iff -4x+2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-4x+2$		$+$	0	$-$	

tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	-1	↗	$+\infty \;\|\|_{-\infty}$	↗	$-\frac{17}{9}$	↘	$-\infty \;\|\|^{+\infty}$	↘	-1

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{-9}{4}} = -\frac{17}{9} \simeq -1,9$$

Exercice 3

x	$-\infty$		-4		-2		0		6		10		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty \;\|\|_{-\infty}$	↗	6	↘	$-\infty \;\|\|^{+\infty}$	↘	0	↗	3