Exercices sur les nombres complexes 2

1° Compléter le tableau suivant:

$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$	forme algébrique	forme trigonométrique	forme exponentielle
		$3\sqrt{3} - 3i$		
			$3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	
				$5e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
2	$-\frac{3\pi}{4}$			

2° Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

a) $z_1 = e^{\frac{2\pi}{9}i} \cdot e^{\frac{4\pi}{9}i}$

b) $z_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{13}$

c) $z_3 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{15}$: -32768

d) $z_4 = \dfrac{4e^{\frac{5\pi}{12}i}}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$:

3°Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = 2 + 2i$.
a) Calculer $z_1 \cdot z_2$.
b) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
c) Calculer ensuite $z_1 \cdot z_2$ en utilisant les formes exponentielles.
d) Comparer les résultats de a) et c) pour trouver les valeurs exactes des $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4° Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner le résultat sous forme algébrique.

a) $z + i = 2 - iz$

b) $z(z + 2i - 3) + 4 = (3 - z)(3i - z)$

c) $(3 + 2i)z - 2i + 5 = -3i - 2$

d) $2z \cdot e^{\frac{4\pi}{9}i} - 4e^{\frac{\pi}{9}i} = 0$

Corrigé:

1°

$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$	forme algébrique	forme trigonométrique	forme exponentielle
6	$-\frac{\pi}{6}$	$3\sqrt{3} - 3i$	$6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$6e^{-i\frac{\pi}{6}}$
3	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$	$3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	$3e^{\frac{2\pi}{3}i}$
5	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$	$5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$	$5e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
2	$-\frac{3\pi}{4}$	$-(1+i)\sqrt{2}$	$2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

2° a) $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $z_3 = -32768$; d) $z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
3°a) $z_1 \cdot z_2 = \left(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)i$
b) $z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; c) $z_1 \cdot z_2 = 8e^{\frac{5\pi}{12}i}$
d) $8e^{\frac{5\pi}{12}i} = 8\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \left(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)i$
donc $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
4°a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$; b) $\frac{9}{5} + \frac{4}{5}i$; c) $-\frac{23}{13} + \frac{11}{13}i$; d) $1 - i\sqrt{3}$