Exercices (limites, asymptotes, dérivées)

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x + 2}$ et C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer le domaine D_f.

b) Déterminer les limites aux bornes du domaine. Indiquer la présence d'asymptotes verticales ou horizontales.

c) Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 2

Mêmes questions qu'à l'exercice 1 pour les fonctions et droites suivantes:

1° $f(x) = \dfrac{16x^2 + 8x + 3}{4x + 1}$ $\qquad y = 4x + 1$

2° $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad y = -x - 1$

3° $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ $\qquad y = 3x + 2$

Exercice 3

Déterminer D_f $D_{f'}$ et la fonction dérivée f' des fonctions suivantes:

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = -100$

c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = x^2 + x + 1$

e) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 1$

f) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{3x}{2x + 1}$

h) $f(x) = \dfrac{-4x + 1}{3x + 2}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{1 - 2x}$

j) $f(x) = \dfrac{2x^6}{x^3}$

k) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 1}$

Corrigé

Ex. 1 - $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$ A.V. : $x = -2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2x^2+5x-1}{x+2} - (2x+1)\right] = 0$ A.O : $y = 2x+1$

Ex. 2-1° $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}^+} f(x) = +\infty$ A.V. : $x = -\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{16x^2+8x+3}{4x+1} - (4x+1)\right] = 0$ A.O : $y = 4x+1$

Ex. 2-2° $D_f = \mathbb{R} - \{1;2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ A.V. : $x = 1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$ A.V. : $x = 2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{-x^3+2x^2+4x-2}{x^2-3x+2} - (-x-1)\right] = 0$ A.O : $y = -x-1$

Ex. 2-3° $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ A.V. : $x = -1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ A.V. : $x = 1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{-x^3+2x^2+4x-2}{x^2-3x+2} - (3x+2)\right] = 0$ A.O : $y = 3x+2$

Ex 3.

a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3$

b) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$

c) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2$

d) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x+1$

e) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$, $f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$

f) $D_f = \mathbb{R}^*$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{5}{x^2}$

g) $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$

h) $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{-11}{(3x+2)^2}$

i) $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2+2x+6}{(2x-1)^2}$

j) $D_f = \mathbb{R}^*$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 6x^2$

k) $D_f = \mathbb{R} - \{-4;1\}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-4;1\}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2-10x-3}{(x^2+3x-4)^2}$

l) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-3x^2+10x+3}{(x^2+1)^2}$