T2EE - Corrigé du devoir en classe de mathématiques II,1

Exercice 1

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$

condition: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 11x - 4}$

condition: $3x^2 - 11x - 4 \geq 0$

$a = 3$	$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 169$
$b = -11$	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11 + 13}{6} = \dfrac{24}{6} = 4$
$c = -4$	$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11 - 13}{6} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
$3x^2 - 11x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{3}\right] \cup [4; +\infty[$

Exercice 2

$f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

a)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(2x+1) \\ &= (2x+1)^2 + 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 + 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 2\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g[h(x)] \\ &= g\left(\frac{2}{3-x}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3-x}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{4}{(3-x)^2} + \frac{(3-x)^2}{(3-x)^2} \\ &= \frac{4 + 9 - 6x + x^2}{(3-x)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x + 13}{(3-x)^2}\end{aligned}$$

c) $(h \circ f)(x) = \dfrac{1}{1-x} \left(\text{car: } h[f(x)] = h(2x+1) = \dfrac{2}{3 - (2x+1)} = \dfrac{2}{2 - 2x} = \dfrac{1}{1-x}\right)$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\overbrace{2x - 4}^{\to 0}}{\underbrace{3x + 1}_{\to 7}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 2}{2x + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{2x} = \dfrac{4}{2} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{\overbrace{x + 2}^{\to \frac{5}{2}}}{\underbrace{1 - 2x}_{\to 0^-}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -4} (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) = -64 + 2 \cdot 16 - 4 \cdot (-4) + 1 = -15$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - x^3}{2x + 7} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{2} = -\infty$

Exercice 4

$$f(x) = \frac{6+2x}{x^2-2x-15}$$

a) condition: $x^2 - 2x - 15 \neq 0$

$a = 1$, $b = -2$, $c = -15$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}$

b) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6+2x}{x^2-2x-15} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\overbrace{6+2x}^{\to 16}}{\underbrace{x^2-2x-15}_{\to 0}}$$ il faut distinguer limite à gauche et à droite

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2-2x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{\overbrace{6+3x}^{\to 16}}{\underbrace{x^2-2x-15}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 5^+} \frac{\overbrace{6+3x}^{\to 16}}{\underbrace{x^2-2x-15}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{\overbrace{6+2x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-2x-15}_{\to 0}} = \lim_{x\to -3} \frac{2(3+x)}{(x+3)(x-5)} = \lim_{x\to -3} \frac{2}{x-5} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

Exercice 5

1 : j (fonction affine ax+b décroissante, donc a<0)

2 : k (fonction carrée $ax^2 + bx + x$ tournée vers le haut, donc a>0)

3 : i (fonction carrée)

4 : h (fonction rationnelle)

5 : f (fonction affine ax+b croissante, donc a>0)

6 : g (fonction carrée $ax^2 + bx + x$ tournée vers le bas, donc a<0)