T2EE - Corrigé du devoir en classe de mathématiques III,2

Exercice 1

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

a) cond.: $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \left(\Delta = 16 - 12 = 4; x \neq \frac{4-2}{2} = 1; x \neq \frac{4+2}{2} = 3\right)$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 1 \quad$ A.H.: $y = 2$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 8x + 3}^{\to -3}}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\to 0}}$ il faut calculer les limites à gauche et à droite

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 8x + 3}^{\to -3}}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\to 0^+}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 8x + 3}^{\to -3}}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\to 0^-}} = +\infty \qquad$ A.V.: $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 8x + 3}^{\to -3}}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\to 0}}$ il faut calculer les limites à gauche et à droite

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 8x + 3}^{\to -3}}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\to 0^-}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 8x + 3}^{\to -3}}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\to 0^+}} = -\infty \qquad$ A.V.: $x = 3$

c) $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \dfrac{(4x-8)(x^2-4x+3) - (2x^2-8x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 - (4x^3 - 24x^2 + 38x - 12)}{(x^2-4x+3)^2}$

$= \dfrac{4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 - 4x^3 + 24x^2 - 38x + 12}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{6x - 12}{(x^2-4x+3)^2}$

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	
f	2	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	2

$f(2) = \frac{8-16+3}{4-8+3} = \frac{-5}{-1} = 5$

e) intersection avec l'axe des abscisses:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40; x_1 = \frac{8+\sqrt{40}}{4} \simeq 3{,}6$ et $x_1 = \frac{8-\sqrt{40}}{4} \simeq 0{,}4$

$C_f \cap (Ox) = \left\{\left(\frac{8+\sqrt{40}}{4};0\right);\left(\frac{8-\sqrt{40}}{4};0\right)\right\}$

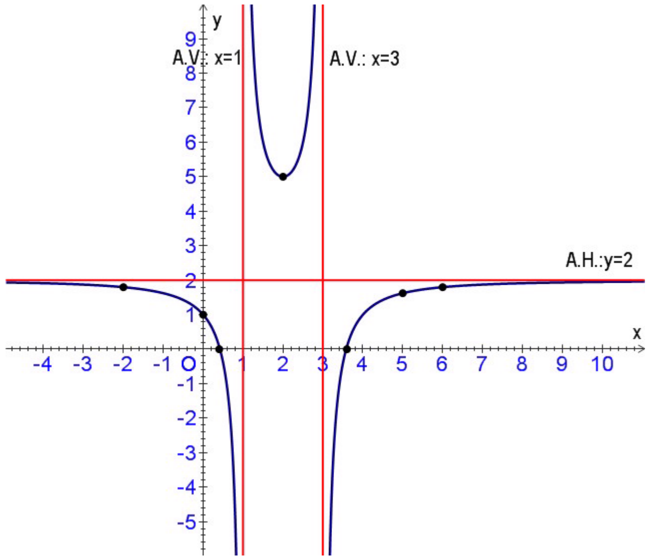
intersection avec l'axe des ordonnées:

$f(0) = \frac{3}{3} = 1$

donc $C_f \cap (Oy) = \{(0;1)\}$

f)

x	-2	5	6
$f(x)$	$1{,}8$	$1{,}625$	$1{,}8$



Exercice 2

$f(x) = -2x^3 + 3x$

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

c) $D_{f'} = \mathbb{R}$

$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = -6x^2 + 6x$

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = 0; f(1) = -2 + 3 = 1$

e) intersection avec l'axe des abscisses:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

$C_f \cap (Ox) = \left\{(0;0); \left(\dfrac{3}{2};0\right)\right\}$

intersection avec l'axe des ordonnées:

$f(0) = 0$

donc $C_f \cap (Oy) = \{(0;0)\}$