AIDE-MÉMOIRE - SIGNE D'UN POLYNÔME

1. POLYNÔME DU PREMIER DEGRÉ

1.1. Définition

$ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

1.2. Racines

$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

1.3. Tableau des signes

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

2. POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

2.1. Définition

$ax^2 + bx + c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

2.2. Racines

$\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta > 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta < 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

pas de solutions dans $\mathbb{R}$

2.3. Factorisation

si $\Delta > 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

avec $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta = 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta < 0$

on ne peut pas factoriser

2.4. Tableau des signes

si $\Delta > 0$ (on suppose $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

Résumé: L'expression $ax^2 + bx + c$ a le signe de a, sauf entre les racines.

Utilisation (quelques exemples):

- Détermination d'un domaine de définition (fractions et racines carrées).
- Calcul de limites (lever la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par factorisation).
- Étude des variations d'une fonction (signe de la dérivée).

SIGNE D'UN POLYNÔME : Exemples

1. Déterminer le signe de $2x - 3$ et de $-4x - 1$.

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$a = 2$ (positif)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$	0	$+$	

$-4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

$a = -4$ (négatif)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-4x - 1$		$+$	0	$-$	

2. Factoriser et déterminer le signe de $x^2 + x - 6$ et de $-4x^2 + 12x - 9$

$x^2 + x - 6 = 0$

$a = 1; b = 1; c = -6; \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

donc $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$-4x^2 + 12x - 9 = 0$

$a = -4; b = 12; c = -9; \Delta = 12^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-9) = 0$

$x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

donc $-4x^2 + 12x - 9 = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\left[2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right] = -(2x-3)^2$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x^2 + 12x - 9$		$-$	0	$-$	

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$a = 2; b = -5; c = -3; \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$

$x_1 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$ et $x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(3x+2)(-4x^2 + 31x - 21) < 0$

- $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$
- $-4x^2 + 31x - 21 = 0$

$a = -4; b = 31; c = -21; \Delta = 31^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-21) = 625 > 0$

$x_1 = \frac{-31+25}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{-31-25}{-8} = \frac{-56}{-8} = 7$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		7		$+\infty$
$3x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-4x^2 + 31x - 21$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(3x+2)(-4x^2 + 31x - 21)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $S = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{4}; 7\right[$