T3EE - Étude d'une fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6}$$

a) domaine de définition

condition: $x^2 + x - 6 \neq 0 \overset{\Delta=25}{\Longleftrightarrow} x \neq -3 \text{ et } x \neq 2$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

b) limites aux bornes du domaine et asymptotes

▹ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \text{de même : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\}$ A.H.: $y = 1$

▹ $\lim\limits_{x\to-3} \frac{\overbrace{x^2 - x - 6}^{\to 6}}{\underbrace{x^2 + x - 6}_{\to 0}}$ il faut distinguer -3^+ et -3^-

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-3^-} \frac{\overbrace{x^2 - x - 6}^{\to 6}}{\underbrace{x^2 + x - 6}_{\to 0^+}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} \frac{\overbrace{x^2 - x - 6}^{\to 6}}{\underbrace{x^2 + x - 6}_{\to 0^-}} = -\infty$ A.V.: $x = -3$

▹ $\lim\limits_{x\to2} \frac{\overbrace{x^2 - x - 6}^{\to -4}}{\underbrace{x^2 + x - 6}_{\to 0}}$ il faut distinguer 2^+ et 2^-

$\lim\limits_{x\to2^-} \frac{\overbrace{x^2 - x - 6}^{\to -4}}{\underbrace{x^2 + x - 6}_{\to 0^-}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{\overbrace{x^2 - x - 6}^{\to -4}}{\underbrace{x^2 + x - 6}_{\to 0^+}} = -\infty$ A.V.: $x = 2$

c) domaine de dérivation et dérivée

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}) : f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2 + x - 6) - (x^2 - x - 6)(2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 12x - x^2 - x + 6 - 2x^3 + 2x^2 + 12x - x^2 + x + 6}{(x^2 + x - 6)^2} = \frac{2x^2 + 12}{(x^2 + x - 6)^2} > 0$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6 = 0$ impossible

d) tableau de variation

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1

e) intersection de C_f avec les axes

▹ $C_f \cap (Ox)$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \overset{\Delta=25}{\Leftrightarrow} x = 3 \text{ ou } x = -2$

donc $C_f \cap (Ox) = \{(-2;0);(3;0)\}$

▹ $C_f \cap (Oy)$:

$f(0) = \dfrac{-6}{-6} = 1$

donc $C_f \cap (Ox) = \{(0;1)\}$

f) Représentation graphique

x	1	-1	4
f(x)	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{7}$