T3EE - Étude d'une fonction

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$$

a) domaine de définition

condition: $(x-2)^2 \neq 0 \overset{\Delta=25}{\Leftrightarrow} x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) limites aux bornes du domaine et asymptotes

▹ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \text{de même : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\}$ A.H.: $y = 1$

▹ $\lim\limits_{x\to2} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to3}}{\underbrace{(x-2)^2}}$ il faut distinguer 2^+ et 2^-

$(x-2)^2 \overset{\to0}{\geq} 0$, donc:

$\lim\limits_{x\to2^-} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to3}}{\underbrace{(x-2)^2}_{\to0^+}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to3}}{\underbrace{(x-2)^2}_{\to0^+}} = +\infty$ A.V.: $x = 2$

c) domaine de dérivation et dérivée

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) : f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-4x+4) - (x^2-1) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2x^3-8x^2+8x-(x^2-1)(2x-4)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{2x^3-8x^2+8x-(2x^3-4x^2-2x+4)}{(x-2)^4} = \frac{2x^3-8x^2+8x-2x^3+4x^2+2x-4}{(x-2)^4} = \frac{-4x^2+10x-4}{(x-2)^4}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2+10x-4 = 0 \overset{\Delta=36}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-4x^2+10x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	1

e) intersection de C_f avec les axes

$\triangleright C_f \cap (Ox)$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

donc $C_f \cap (Ox) = \{(-1;0);(1;0)\}$

$\triangleright C_f \cap (Oy)$:

$f(0) = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$

donc $C_f \cap (Ox) = \left\{\left(0;-\frac{1}{4}\right)\right\}$

f) Représentation graphique

x	4	5	-2
$f(x)$	$\frac{15}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{16}$