T3EE - Étude d'une fonction

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x}$

a) domaine de définition

condition: $x^2 - 3x \neq 0 \overset{\Delta=25}{\Leftrightarrow} x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 3$

donc $D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{3\}$

b) limites aux bornes du domaine et asymptotes

$$\triangleright \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \\ \text{de même : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{A.H.: } y = 1$$

$$\triangleright \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2 - 3x}_{\to 0}} \quad \text{il faut distinguer } 0^+ \text{ et } 0^-$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	+	0 −	0 +	

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2 - 3x}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2 - 3x}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{A.V.: } x = 0$$

$$\triangleright \lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{\to 4}}{\underbrace{x^2 - 3x}_{\to 0}} \quad \text{il faut distinguer } 3^+ \text{ et } 3^-$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{\to 4}}{\underbrace{x^2 - 3x}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{\to 4}}{\underbrace{x^2 - 3x}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{A.V.: } x = 3$$

c) domaine de dérivation et dérivée

$$(\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{3\}) : f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x^2-3x) - (x^2-2x+1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 6x - (2x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 6x + 2x - 3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{2x^3 - 8x^2 + 6x - (2x^3 - 7x^2 + 8x - 3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 8x^2 + 6x - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 3}{(x^2-3x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2-3x)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \overset{\Delta=16}{\Leftrightarrow} x = -3$ ou $x = 1$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$	−	0 +	0 −	

d) tableau de variation

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

e) intersection de C_f avec les axes

$\triangleright C_f \cap (Ox)$:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
donc $C_f \cap (Ox) = \{(1;0)\}$

$\triangleright C_f \cap (Oy)$:
f n'est pas définie en 0
donc $C_f \cap (Oy) = \varnothing$

f) Représentation graphique

x	-1	2	4
$f(x)$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$