EXAMEN 2006 - T3EE/T3EC

Exercice 1 (14 points)

Soit la fonction f, définie par $f(x) = \dfrac{4x-1}{(x-2)^2}$ et soit C_f sa courbe.

Déterminer le domaine de définition de f.

Vérifier que la dérivée de f est définie par: $f'(x) = \dfrac{-4x-6}{(x-2)^3}$.

Établir le tableau de variations de f (avec limites, asymptotes, extrema).

Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes.

Quelle est la pente de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 ?

Exercice 2 (4+2=6 points)

Déterminer le domaine de définition et la dérivée des fonctions définies ci-dessous:

a. $f(x) = x^2 \cdot \ln(1-x)$ (donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible)

b. $g(x) = 5(3e^x + 1)^4$

Exercice 3 (6 points)

On veut fabriquer des boîtes en aluminium avec couvercle, en forme de prisme à base carrée de côté c. Le volume d'une telle boîte doit être de huit litres.

Déterminer les dimensions d'une telle boîte si on veut que la quantité d'aluminium soit minimale.

Indication:

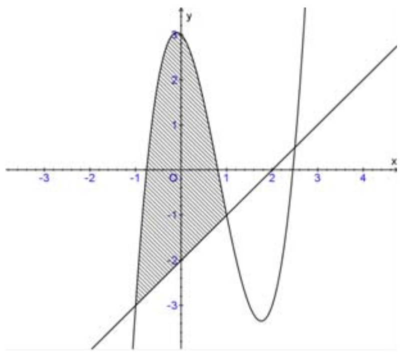
Vérifier que la quantité d'aluminium nécessaire à la fabrication d'une telle boîte est déterminée par la fonction A, définie par: $A(c) = 2c^2 + \dfrac{32}{c}$.

Exercice 4 (6+6+5=17 points)

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$

1. Déterminer les nombres réels a,b et c tels que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on ait:
$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. *(indication: montrer que $P(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 5)$)*

2.



On donne $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 3$ et $y_d = x - 2$.

Déterminer par un calcul les abscisses des points d'intersection de C_f et de d.

Calculer l'aire hachurée.

3. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $5 + 2e^{3x} = 5e^{2x} + 2e^x$

Exercice 5 (8 points)

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $\ln(2x+5) = 2\ln x - \ln(2-x)$

Exercice 6 (3+3+3=9 points)

1.Déterminer une primitive des fonctions, définies ci-dessous:

a. $f(x) = \dfrac{2-x}{(x^2-4x+5)^2}$ b. $g(x) = 2e^{2x+3} - \dfrac{4}{3x-1}$

2. Calculer l'intégrale suivante: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(3x)dx$.

EXAMEN 2006 - T3BA/T3CC

Exercice 1 (1+5+3+4=13 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$.

a) Détermine le domaine de définition de f.

b) Détermine les limites de f aux bornes du domaine de définition et précise les éventuelles asymptotes.

c) Détermine le domaine de dérivabilité, calcule la dérivée de f et montre que $f'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$.

d) Établis le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 2 (7+7=14 points)

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $\ln(6x^2+x-2) - \ln(5-2x) = \ln(1-x) - \ln 2$

b) $3e^{3x} + 5 = 19e^x - 11e^{2x}$

(indication: montrer que $3y^3 + 11y^2 - 19y + 5 = (y+5)(3y^2-4y+1)$ *)*

Exercice 3 (5+3+4=12 points)

Calculez la dérivée des fonctions suivantes, après avoir déterminé le domaine de définition et le domaine de dérivabilité:

a) $f(x) = \ln\frac{2x+1}{x-2}$ b) $f(x) = x - \ln(x^2+9)$ c) $f(x) = e^{2x^2-x}(2x^3-5x)$

Exercice 4 (3+2=5 points)

Déterminez les primitives des fonctions suivantes:

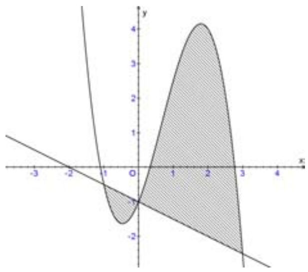
a) $f(x) = 4x - 5 + \frac{5}{4x-5}$ b) $f(x) = \cos^5 x \sin x$

Exercice 5 (3+4=7 points)

Calculer les intégrales suivantes:

a) $I = \int_3^6 \frac{6}{\sqrt{3x+7}}dx$ b) $I = \int_{-1}^{2} \frac{x-1}{(3x^2-6x+4)^2}dx$

Exercice 6 (9 points)



Déterminez l'aire de la surface hachurée délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par:

$f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ et $g(x) = -x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x - 1$

Les points d'intersection sont à déterminer par un calcul.

EXAMEN 2006 - T3IF

Exercice 1 (1+2,5+2+4+1,5+3=14 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{(x-1)^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminez le domaine de définition de f.

b) Calculez les limites aux bornes du domaine et indiquez les asymptotes verticales ou horizontales éventuelles.

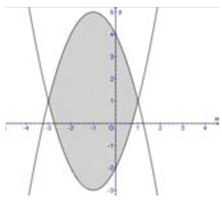
c) Montrez que $f'(x) = \dfrac{4-2x}{(x-1)^3}$.

d) Établissez le tableau de variation.

e) Cherchez les intersections éventuelles de C_f avec les axes.

f) Calculez les coordonnées de quelques points de C_f, puis tracez C_f.

Exercice 2 (2+5=7 points)



Le graphique ci-contre est la représentation des fonctions f et g, définies par $f(x) = x^2 + 2x - 2$, respectivement $g(x) = -x^2 - 2x + 4$.

a) Déterminez les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

b) Calculez l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

Exercice 3 (7+5=12 points)

Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé les conditions d'existence:

a) $2\ln(x+1) - \ln(5-x) - \ln(2x+3) = 0$

b) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

Exercice 4 (5 points)

Déterminez le domaine de définition et calculez la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(4-5x)}{5x-4}$.

Exercice 5 (4+4+4=12 points)

a) Calculez l'intégrale suivante: $\displaystyle\int_0^1 \frac{8e^{4x}}{5+e^{4x}}\,dx$

b) Calculez <u>une</u> primitive de la fonction f définie par: $f(x) = \dfrac{(2\sqrt{x}-3)^2}{x \cdot \sqrt{x}}$

c) Calculez <u>les</u> primitives de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$

Exercice 6 (3+2+3+2=10 points)

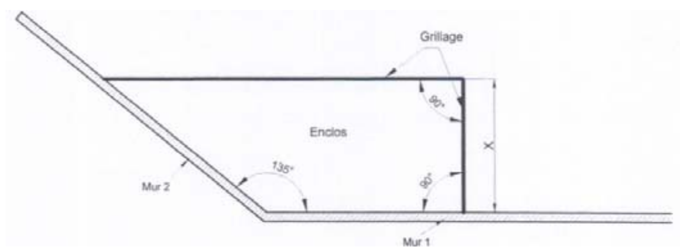
Un propriétaire veut construire dans son jardin un enclos pour son chien. Comme il ne dispose que d'une longueur de grillage de 9 mètres, il veut installer l'enclos dans le coin formé par deux murs formant un angle de 135°. Le côté x du grillage doit être à angle droit avec le mur 1 et avec le deuxième côté du grillage. Le propriétaire cherche à rendre maximale la surface A de l'enclos.

a) Choisissez vos variables et écrivez la surface A en fonction de celle-ci.

b) Réécrivez votre fonction A en éliminant une variable et montrez que A peut s'écrire: $A(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 9x$

c) Cherchez l'extremum de la fonction et montrez qu'il s'agit d'un maximum.

d) Écrivez la solution complète en indiquant la surface et la longueur des côtés du grillage.

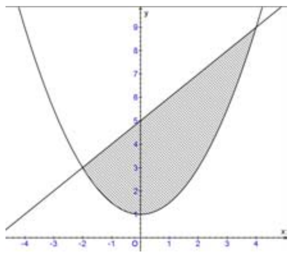


EXAMEN 2006 - T3MG

Exercice 1
Déterminer les primitives des fonctions f définies par:
a) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$
b) $f(x) = \left(\frac{x}{4} + 3\right)^4$
c) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$
d) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

Exercice 2 (5+5+5=15 points)
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes:
1) $\int_{-1}^{2}\left(2x + 1 + \frac{1}{2x+3}\right)dx$
2) $\int_{\ln 1}^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$
3) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} xe^{2x^2}dx$

Exercice 3 (2+5=7 points)



Soient deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ et $g(x) = x + 5$.

a) Déterminer par le calcul les coordonnées (abscisses et ordonnées)

des points d'intersection des deux fonctions.

b) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par les courbes représentattives des deux fonctions

Exercice 4 (7 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $2\ln x = \ln\frac{1}{2} + \ln[2(6-x)]$

Exercice 5 (2+3+3=8 points)
On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.
1) Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
(indication: montrer que $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$*)*
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3) En déduire les résolution de l'équation suivante: $e^{3x} - 4e^{2x} + e^x + 6 = 0$.

Exercice 6 (7 points)
Un réservoir cylindrique sans couvercle doit avoir un volume de 3141 cm^3. Calculer les dimensions du réservoir, sachant que le matériel à utiliser pour la fabrication doit être minimal.