Exercices T3EE - ÉTUDE D'UNE FONCTION

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 - 6x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{4}{3x^2 - 13x - 10}$

f) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

g) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$

h) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{-x^2 - x + 2}}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 2x}}{3x}$

j) $f(x) = (2x + 5)\sqrt{2x^2 + 3x + 5}$

Exercice 2

Pour les fonctions suivantes:
-déterminer le domaine de définition D_f
-étudier les limites aux bornes du domaine
-trouver les équations de toutes les asymptotes

a) $f(x) = (2x^3 + 1)(x - 2)$

b) $f(x) = (3x - 2)\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 4x - 4}$

e) $\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 5}$

Exercice 3

Pour les fonctions suivantes:
-déterminer le domaine de définition D_f
-déterminer le domaine de dérivabilité $D_{f'}$
-calculer la fonction dérivée

a) $f(x) = 4x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

b) $f(x) = (3x^2 - x)(4x + 5)$

c) $f(x) = (3x - 2)^2(x^2 - 2x)$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{2 - x}$

e) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

g) $f(x) = \dfrac{(3x - 4)^2}{x^2 - 5x + 6}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{(2x - 7)^3}$

Exercice 4

Faire l'étude des fonctions suivantes selon le schéma suivant:
-déterminer le domaine de définition de la fonction
-étudier la parité de la fonction et en déduire éventuellement son nouveau domaine d'étude
-déterminer les limites aux bornes du domaine et les équations d'éventuelles asymptotes horizontales ou verticales
-étudier les variations de la fonction sur son domaine d'étude
-construire la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{-x - 3}{3x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 2x + 4}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2x - 3}$

Exercices T3EE - ÉTUDE D'UNE FONCTION corrigé

Exercice 1

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{3\}$

c) $D_f = \mathbb{R}$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2};5\right\}$

f) $D_f = \left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$

g) $D_f =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

h) $D_f =]-2;1[$

i) $D_f =]-\infty;0[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$

j) $D_f = \mathbb{R}$

Exercice 2

a) $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) $D_f =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

A.H.: $y = 0$; A.V.: $x = 3$

d) $D_f = \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]-\frac{2}{3};2\right[\cup]2;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

A.H.: $y = \frac{1}{3}$; A.V.: $x = -\frac{2}{3}$

e) $D_f = \left]-\infty;\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

A.V.: $x = \frac{5}{2}$

Exercice 3

a) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = 20x^4 - 12x^2 + 2$

b) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = 36x^2 - 22x - 5$

c) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2(3x-2)(6x^2 - 11x + 2)$

d) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f'(x) = \dfrac{6}{(2-x)^2}$

e) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$; $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 18}{(x^2-9)^2}$

f) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

g) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$; $f'(x) = \dfrac{(3x-4)(16-7x)}{(x^2-5x+6)^2}$

h) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$; $f'(x) = \dfrac{-2x(x+7)}{(2x-7)^4}$

Exercice 4

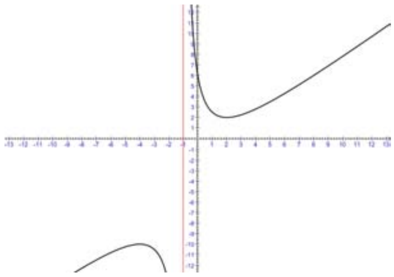
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x + 1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$

A.V.: $x = -1$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$



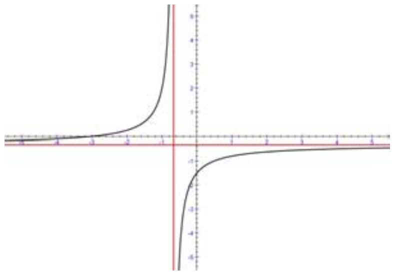
b) $f(x) = \dfrac{-x-3}{3x+2}$;

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{7}{(3x+2)^2}$

A.H.: $y = -\frac{1}{3}$; A.V.: $x = -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
f	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$



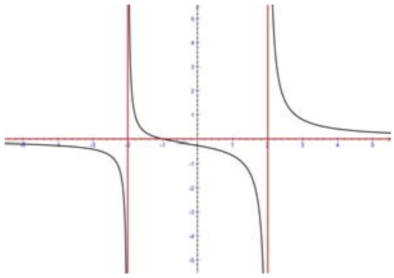
c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

$f'(x) = -\dfrac{x^2 + 2x + 4}{(x^2-4)^2}$

A.H.: $y = 0$; A.V.: $x = -2$; A.V.: $x = -2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$



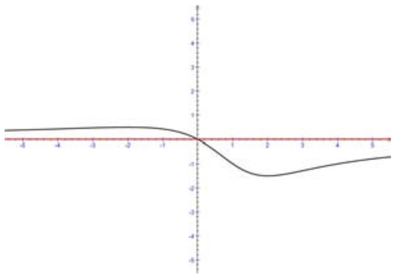
d) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 2x + 4}$

$D_f = \mathbb{R}$

A.H.: $y = 0$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{(x^2 - 2x + 4)^2}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0



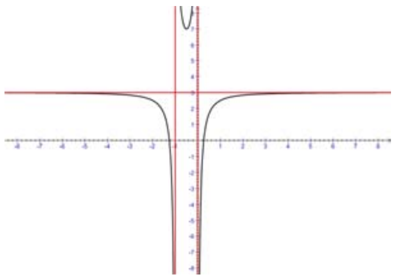
e) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$

A.H.: $y = 3$; A.V.: $x = -1$; A.V.: $x = 0$

$f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	$\Vert$	$+$	
f	3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	3



f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2x - 3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$

A.H.: $y = 1$; A.V.: $x = -3$; A.V.: $x = 1$

$f'(x) = \dfrac{6x^2 - 6x + 12}{(x^2 + 2x - 3)^2}$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1