T3EE - Corrigé du devoir en classe de mathématiques I,1

Exercice 1

$f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

a) cond.: $x^2-4x+3 \neq 0 \left(\Delta = 16-12 = 4; x \neq \frac{4-2}{2} = 1; x \neq \frac{4+2}{2} = 3\right)$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \quad$ A.H.: $y = 1$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\overbrace{x^2-4x}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\to 0}}$ il faut calculer les limites à gauche et à droite

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\overbrace{x^2-4x}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\to 0^+}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\overbrace{x^2-4x}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\to 0^-}} = +\infty \qquad$ A.V.: $x = 1$

$\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\overbrace{x^2-4x}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\to 0}}$ il faut calculer les limites à gauche et à droite

$\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{\overbrace{x^2-4x}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\to 0^-}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{\overbrace{x^2-4x}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\to 0^+}} = -\infty \qquad$ A.V.: $x = 3$

c) $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(x^2-4x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{(2x-4)[(x^2-4x+3)-(x^2-4x)]}{(x^2-4x+3)^2}$

$= \dfrac{(2x-4)\cdot 3}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{6x-12}{(x^2-4x+3)^2}$

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x-12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1

$f(2) = \frac{4-8}{4-8+3} = \frac{-4}{-1} = 4$

e) intersection avec l'axe des abscisses:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

$C_f \cap (Ox) = \{(0;0);(4;0)\}$

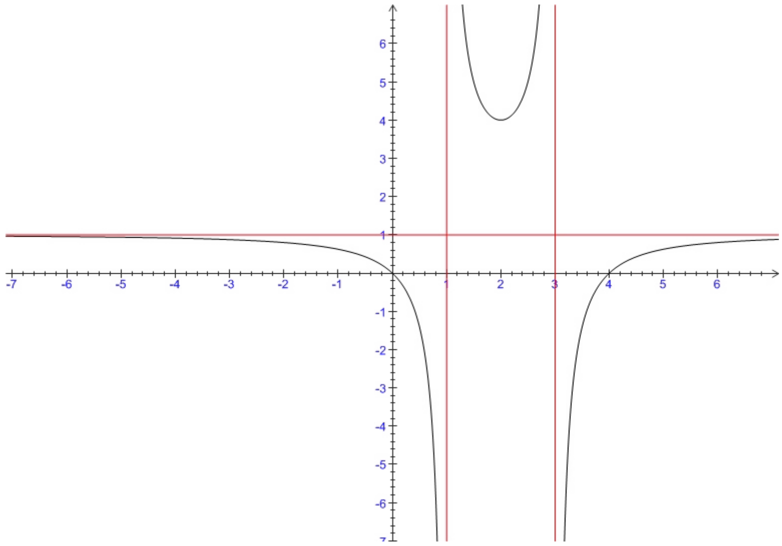
intersection avec l'axe des ordonnées:

$f(0) = 0$

donc $C_f \cap (Oy) = \{(0;0)\}$

f)

x	-2	-1	$0,5$	$3,5$	5
$f(x)$	$0,8$	$0,625$	$-1,4$	$-1,4$	$0,625$



Exercice 2

a) Aire des plaques de métal utilisées: 2 fois la base, 1 fois le couvercle et 4 parois latérales

Donc: $2x^2 + x^2 + 4xy = 3x^2 + 4xy$

Volume du réservoir: $x \cdot x \cdot y = 2592 \Leftrightarrow x^2 y = 2592 \Leftrightarrow y = \dfrac{2592}{x^2}$

Donc $A(x) = 3x^2 + 4x \cdot \dfrac{2592}{x^2} = 3x^2 + \dfrac{4 \cdot 2592}{x} = \dfrac{3x^3 + 10368}{x}$ avec $x \in]0;+\infty[$.

b) $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $A'(x) = \dfrac{9x^2 \cdot x - (3x^3 + 10368) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{9x^3 - 3x^3 - 10368}{x^2} = \dfrac{6x^3 - 10368}{x^2}$

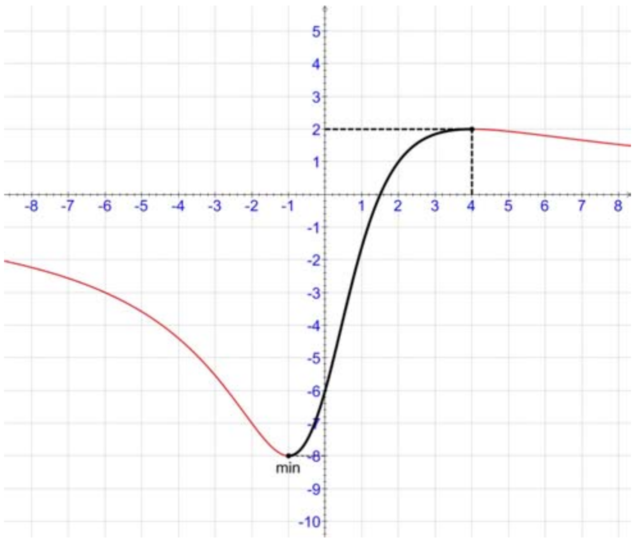
$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 10368 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10368}{6} = 1728 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1728} = 12$

x	0		12		$+\infty$
A'	‖	$-$	0	$+$	
A	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$	

si $x = 12$, alors $y = \dfrac{2592}{12^2} = 18$

La quantité de métal utilisée est minimale si x vaut 12 dm et y vaut 18 dm.

Exercice 3



a) Le minimum est -8. (Il est atteint en -1.)

b) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 4; S = \{4\}$

c) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ f est croissante $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

$S = [-1;4]$

d) $f(x) = \dfrac{16x - 24}{x^2 + 4}$

Ce n'est pas $x^3 - 2x^2 - 6$,

car p.ex. si x=1 alors $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 6 = -7$.

Ce n'est pas $\dfrac{16x - 24}{x^2 - 4}$,

car cette expression n'existe pas pour $x = 2$ et $x = -2$.