T3EE - Corrigé I,1 du 20.11.2007

Exercice 1

a) domaine de définition

$$f(x) = \frac{-x^2+x+4}{x^2-x-2}$$

condition: $x^2-x-2 \neq 0 \overset{\Delta=9}{\Longleftrightarrow} x \neq \frac{1+3}{2} = 2$ et $x \neq \frac{1-3}{2} = -1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$

b) limites aux bornes du domaine et asymptotes

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \\ \text{de même : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \end{array}\right\} \text{A.H.: } y = -1$$

▹ $\lim\limits_{x\to-1} \frac{\overbrace{-x^2+x+4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0}}$ il faut distinguer -1^+ et -1^-

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{\overbrace{-x^2+x+4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{\overbrace{-x^2+x+4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{A.V.: } x = -1$$

▹ $\lim\limits_{x\to2} \frac{\overbrace{-x^2+x+4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0}}$ il faut distinguer 2^+ et 2^-

$$\lim_{x\to2^-} \frac{\overbrace{-x^2+x+4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} \frac{\overbrace{-x^2+x+4}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{A.V.: } x = 2$$

c) domaine de dérivation et dérivée

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}) : f'(x) &= \frac{(-2x+1)\cdot(x^2-x-2)-(-x^2+x+4)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{-2x^3+2x^2+4x+x^2-x-2-(-2x^3+x^2+2x^2-x+8x-4)}{(x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{-2x^3+3x^2+3x-2+2x^3-3x^2-7x+4}{(x^2-3x)^2} = \frac{-4x+2}{(x^2-3x)^2}\end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-4x+2$		$+$	0	$-$	

d) tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{17}{9}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{-9}{4}} = -\frac{17}{9} \simeq -1,9$$

e) intersection de C_f avec les axes

$\triangleright C_f \cap (Ox)$:

$f(x) = 0 \iff -x^2 + x + 4 = 0 \overset{\Delta=17}{\iff} x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{-2} \simeq -1{,}6$ ou $x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{-2} \simeq 2{,}6$

donc $C_f \cap (Ox) = \left\{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{-2};0\right);\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{-2};0\right)\right\}$

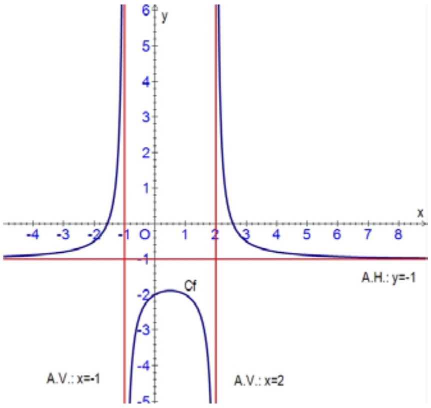
$\triangleright C_f \cap (Oy)$:

$f(0) = \dfrac{4}{-2} = -2$

donc $C_f \cap (Oy) = \{(0;-2)\}$

f) Représentation graphique

x	-2	1	3
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$



Exercice 2

a) longueur de la clôture: $8x + 9y = 288 \iff 9y = 288 - 8x \iff y = \dfrac{288-8x}{9}$

surface au sol d'une cage: $S(x) = x \cdot y = x \cdot \dfrac{288-8x}{9} = \dfrac{288x - 8x^2}{9}$

b) $x \in [0;36]$ (car il faut que $8x \leq 288$)

c) $(\forall x \in [0;36]) : S'(x) = \dfrac{288-16x}{9}$

$S'(x) = 0 \iff 288 - 16x = 0 \iff 16x = 288 \iff x = \frac{288}{16} = 18.$

x	0		18		64
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Si $x = 18$ alors $y = \frac{288-8\cdot18}{9} = 16.$

Donc la surface au sol de la cage est maximale si $x = 18$m et $y = 16$m.

Exercice 3

a) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{\overbrace{-x^2+x+12}^{\to 0}}{\underbrace{2x+6}_{\to 0}}$ il faut donc factoriser

$-x^2 + x + 12 = 0 \overset{\Delta=49}{\iff} x = \frac{-1+7}{-2} = -3$ ou $x = \frac{-1-7}{-2} = 4$

donc: $-x^2 + x + 12 = -(x+3)(x-4)$

ainsi: $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{-x^2+x+12}{2x+6} = \lim_{x\to-3} \frac{-(x+3)(x-4)}{2(x+3)} = \lim_{x\to-3} \frac{-x+4}{2} = \frac{7}{2}$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) + 2\sin x \cdot \cos x = 0$

ou bien: $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 1$ donc $f'(x) = 0.$