T3EE - Corrigé du devoir en classe de mathématiques II,1

Exercice 1

a) $A = \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^3 [(-x^2 + 4x + 1) - (x - 2)]dx = \int_1^3 (-x^2 + 3x + 3)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2} + 9\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 3\right) = 6 + \frac{24}{2} - \frac{26}{3}$

$= 18 - \frac{26}{3} = \frac{28}{3}$ u.a.

b) abscisses des points d'intersection:

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1; x = \frac{-3+1}{2} = -1$ ou $; x = \frac{-3-1}{2} = -2$

$g(0) = 1; g(-1) = 1 - 2 + 1 = 0; g(-2) = 4 - 4 + 1 = 1$

points d'intersection: $A(-2;1)$ et $B(-1;0)$ et $C(0;1)$.

Donc $A = \int_{-2}^{-1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x)dx + \int_{-1}^{0} (-x^3 - 3x^2 - 2x)dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}$

$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - \left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) + 0 - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right) = -\frac{14}{4} + 4 = \frac{1}{2}$u.a.

Exercice 2

a) $3\ln x = 2\ln 8$

condition: $x > 0$, donc $D =]0;+\infty[$

$3\ln x = 2\ln 8$

$\Leftrightarrow \ln(x^3) = \ln(8^2)$

$\Leftrightarrow x^3 = 64$

$\Leftrightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

b) $\ln(x^2 - 2x) = \ln(4x + 1) + \ln(2 - x)$

conditions:

♦ $-x^2 + 2x > 0$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc il faut que $x < 0$ ou $x > 2$.

♦ $4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$

♦ $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

finalement $D = \left]-\frac{1}{4};0\right[$

$\ln(x^2 - 2x) = \ln(4x + 1) + \ln(2 - x)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x) = \ln[(4x + 1)(2 - x)]$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = -4x^2 + 7x + 2$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 9x - 2 = 0$

$\Delta = 121; x_1 = \frac{9+11}{10} = 2 \notin D; x_2 = \frac{9-11}{10} = -\frac{1}{5} \in D$

$S = \{-\frac{1}{5}\}$

2°a) $(x-3)(x+2)(2x-1)$
$= (x-3)(2x^2+3x-2)$
$= 2x^3+3x^2-2x-6x^2-9x+6$
$\stackrel{!}{=} 2x^3-3x^2-11x+6$

b) $2\ln^3 x - 3\ln^2 x - 11\ln x + 6 = 0$
posons $y = \ln x$
l'équation devient: $2y^3-3y^2-11y+6=0$
$\Leftrightarrow (y-3)(y+2)(2y-1)=0$
$\Leftrightarrow y = 3$ ou $y=-2$ ou $y=\frac{1}{2}$
Revenons en arrière:
si $y=3$, alors $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$
si $y=-2$, alors $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$
si $y=\frac{1}{2}$, alors $\ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
$S = \left\{e^3; \dfrac{1}{e^2}; \sqrt{e}\right\}$

Exercice 3

a) $f(x) = \ln(x^2) + \ln^2 x - \ln(2x) + (\ln 2)^2$
condition: $x>0$, donc $D_f =]0;+\infty[= D_{f'}$
$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} + 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2x} + 0 = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+2\ln x}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}\,\ln(x+1)$
condition: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, , donc $D_f =]-1;+\infty[= D_{f'}$
$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \ln(x+1) + \sqrt{x+1} \cdot \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}$
$= \dfrac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\ln(x+1)+2}{2\sqrt{x+1}}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-3}{x+5}\right)$
condition: $\dfrac{2x-3}{x+5} > 0$
$2x-3=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ / $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x-3}{x+5}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

donc $D_f = D_{f'} =]-\infty;-5[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$
$(\forall x \in D_{f'}) : f'(x) = \dfrac{\frac{2(x+5)-(2x-3)\cdot 1}{(x+5)^2}}{\frac{2x-3}{x+5}} = \dfrac{\frac{13}{(x+5)^2}}{\frac{2x-3}{x+5}} = \dfrac{13}{(x+5)^2} \cdot \dfrac{x+5}{2x-3} = -\dfrac{13}{(x+5)(2x-3)}$